

JUN ANDREAS TOMIDA

**CONTÁGIO E CRISE DE LIQUIDEZ: UM ESTUDO EM
EMPRESAS NÃO FINANCEIRAS**

Trabalho de formatura apresentado à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para obtenção do diploma de Engenheiro de
Produção.

São Paulo

2014

JUN ANDREAS TOMIDA

**CONTÁGIO E CRISE DE LIQUIDEZ: UM ESTUDO EM
EMPRESAS NÃO FINANCEIRAS**

Trabalho de formatura apresentado à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para obtenção do diploma de Engenheiro de
Produção.

Orientadora: Prof^a Dr^a.
Celma de Oliveira Ribeiro

São Paulo

2014

Catalogação-na-publicação

Tomida, Jun Andreas

Contágio e crise de liquidez: um estudo em empresas não financeiras / J.A. Tomida. -- São Paulo, 2014.

100 p.

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Produção.

1.Finanças 2.Crise de liquidez 3.Inadimplência I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Produção II.t.

À minha família.

AGRADECIMENTOS

À Professora Dr^a. Celma de Oliveira Ribeiro, que me orientou durante a elaboração deste trabalho com descontração, solicitude e empenho.

Aos professores do Departamento de Engenharia de Produção da Escola Politécnica, que contribuíram de forma ímpar em minha formação como engenheiro e cidadão, viabilizando de maneira imprescindível a elaboração deste trabalho.

Aos meus amigos de Graduação, que compartilharam comigo grande parte de minha jornada Politécnica, vivenciando desafios, momentos de comemoração e descontração.

À minha família, à qual devo todo o suporte e apoio necessários para que realizasse o tão almejado objetivo de me tornar um engenheiro.

RESUMO

Este trabalho propõe a criação de um indicador financeiro que possa servir como *input* em um modelo de contágio de crise de liquidez entre duas empresas não financeiras, com o objetivo de se avaliar quais parâmetros mais influenciam a probabilidade de ocorrência do fenômeno. Apesar de amplamente estudado na literatura, o contágio financeiro raramente é analisado do ponto de vista de empresas não financeiras. A abordagem deste trabalhado foi, portanto, averiguar quais medidas tais empresas poderiam tomar para alterar os parâmetros envolvidos e reduzir a probabilidade de contágio e sua severidade. Para tanto, o modelo de Black-Scholes-Merton foi aplicado para se estimar a volatilidade de ativos empresariais, raramente observável, para então se inferir as probabilidades de *default* de tais empresas no curto prazo. Por fim, um modelo de contágio previamente concebido por Frederick Oh foi alterado e aplicado com base nestas probabilidades. Os resultados indicam forte sensibilidade na probabilidade de contágio em relação ao parâmetro K , o valor do colateral descrito nos contratos de crédito, e dos custos de oportunidade utilizados pelos credores. Ficou estabelecido ainda que a probabilidade de contágio apresenta um valor máximo para valores intermediários de volatilidade de *equity* das empresas.

Palavras-Chave: Crise de liquidez. Contágio financeiro. Probabilidade de inadimplência. Teoria dos jogos. Jogos globais.

ABSTRACT

This paper proposes the creation of a financial indicator that can serve as input to a contagion model of a liquidity crisis between two non-financial companies, with the aim of assessing which parameters most influence the probability of occurrence of the phenomenon. Although widely studied in the literature, financial contagion is rarely analyzed from the standpoint of non-financial companies. The chosen approach was therefore to ascertain what measures such companies could take to change the parameters involved and reduce the likelihood of contagion and its severity. Thus, the Black-Scholes-Merton model was applied to estimate the volatility of corporate assets, seldom observable, and then infer the probability of default of such companies in the short term. Finally, a model of contagion previously designed by Frederick Oh was altered and implemented based on these probabilities. The results indicate a strong sensitivity in the contagion probability related to the parameter K (the collateral value of debt contracts) and to the discount factor used by creditors. It is also established that the contagion probability assumes its maximum value for intermediary values of companies' equity volatility.

Keywords: Liquidity crisis. Financial contagion. Default rates. Game theory. Global games.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Quadro de tipos de risco.....	29
Figura 2 – Esquema do balanço patrimonial de um banco central	33
Figura 3 – Comparaçao entre teoria dos jogos clássica e jogos globais (resumo)	44
Figura 4 – Etapas do modelo de contágio.....	48
Figura 5 – Quadro da matriz de retornos para credores	49
Figura 6 – Sequênci a lógica da metodologia do modelo.....	57
Figura 7 – Resultados da simulação-base	70
Figura 8 – Gráfico de resultados da análise de sensibilidade (volatilidade de <i>equity</i> empresa A).....	72
Figura 9 – Gráfico de resultados da análise de sensibilidade (volatilidade de <i>equity</i> empresas A e B)	73
Figura 10 – Gráfico de resultados da análise de sensibilidade (volatilidade de <i>equity</i> empresa B com inversão da ordem de rolagem)	74

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Resumo das informações de mercado das empresas estudadas	59
Tabela 2 – Parâmetros da simulação-base	69
Tabela 3 – Resultados da análise de sensibilidade (volatilidade de <i>equity</i> da empresa A)	71
Tabela 4 – Resultados da análise de sensibilidade (volatilidade de <i>equity</i> da empresa B)	72
Tabela 5 – Resultados da análise de sensibilidade (K)	75
Tabela 6 – Resultados da análise de sensibilidade (δP)	76
Tabela 7 – Resultados da análise de sensibilidade (ε)	77
Tabela 8 – Resultados da análise de sensibilidade (λ)	78
Tabela 9 – Resultados da análise de sensibilidade (BSM, resumo)	84
Tabela 10 – Resultados da análise de sensibilidade (contágio, resumo)	85

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BB	Banco do Brasil
BSM	Black-Scholes-Merton
ECB	European Central Bank
FMA	Financial Markets Authority
GARCH	Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic

LISTA DE SÍMBOLOS

V_A	Valor dos ativos
V_E	Valor da <i>equity</i>
X	Valor de face da dívida
σ_A	Volatilidade dos ativos
σ_E	Volatilidade da <i>equity</i>
T	Horizonte de tempo
δ_O	Taxa de desconto do credor otimista
δ_P	Taxa de desconto do credor pessimista
q	Probabilidade do grupo 1 de credores ser pessimista
γ	Proporção de credores pertencentes ao grupo 1
L	Valor de face da dívida
K	Valor do colateral da dívida
ε	Ruído no sinal divulgado aos credores
i	Número de iterações do modelo de contágio

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
1.1	Problema e Motivação	22
1.2	Objetivo	23
1.3	Estrutura do Trabalho	24
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	27
2.1	Risco	27
2.2	Liquidez e risco.....	29
2.2.1	Liquidez de mercado	30
2.2.2	Liquidez de financiamento	31
2.2.3	Liquidez do Banco Central	32
2.3	Contágio financeiro.....	33
2.3.1	Definição	33
2.3.2	Medidas empíricas.....	35
2.3.3	Modelos de contágio.....	37
2.3.4	Dois tipos de contágio bancário	40
2.4	Teoria dos jogos e jogos globais.....	41
2.4.1	Desenvolvimento histórico	41
2.4.2	Forma normal	42
2.4.3	Forma extensiva.....	43
2.4.4	Jogos globais	43
2.4.5	Jogos globais e contágio	44
3	O MODELO DE OH (2013).....	47
3.1	Descrição do modelo	47
3.2	Principais conclusões e desdobramentos	53
3.3	Modificação do modelo estudado	55

4 UMA PROPOSTA DE MODELO - METODOLOGIA	57
4.1 Escolha das empresas e dados de mercado	58
4.2 Determinação dos valores de ativo e volatilidade	59
4.2.1 Black-Scholes-Merton	60
4.2.2 Solução do sistema de equações	63
4.3 Valores de ativo no horizonte de um ano	65
4.4 Probabilidades de <i>default</i> e <i>theta</i>	66
4.5 Aplicação do modelo de contágio	67
5 RESULTADOS	69
5.1 Simulação-Base	69
5.2 Análises de sensibilidade.....	70
5.2.1 Análises quanto ao modelo de definição de theta	70
5.2.2 Análises quanto ao modelo de contágio.....	74
6 DISCUSSÃO	79
6.1 Análise quanto ao modelo de definição de <i>theta</i>	79
6.2 Análise quanto ao modelo de contágio.....	80
7 CONCLUSÕES	83
7.1 Síntese dos resultados obtidos.....	83
7.2 Dificuldades encontradas	85
7.3 Sugestões para próximos estudos	86
7.4 Considerações finais.....	87
8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	89
APÊNDICE A	93

1 INTRODUÇÃO

O contexto de desenvolvimento deste Trabalho de Formatura não é dos mais típicos. Diversas circunstâncias, incluindo a cronologia do retorno do aluno de um intercâmbio e o caráter confidencial do estágio supervisionado posteriormente iniciado, em consultoria estratégica, dificultaram e terminaram por impossibilitar a realização do presente trabalho no mesmo ambiente do estágio citado.

O campo de estudo escolhido, no entanto, torna-se cada vez mais relevante no contexto da Engenharia, em especial no da Engenharia de Produção. A estabilidade dos mercados financeiros é temática de relevância crescente, e cada vez mais se recorre a engenheiros no mercado de trabalho que, por serem capazes de exercer raciocínio fortemente analítico, se adéquam em demasia ao contexto financeiro. Além de tal espécie de raciocínio, o engenheiro de produção tem em sua formação elementos que o diferenciam dos demais engenheiros, como, por exemplo, o senso de negócio, desenvolvido em disciplinas como Administração e Organização e Engenharia Econômica e Finanças.

Este trabalho busca unir tais competências, de forma a trabalhar a temática financeira de uma maneira ainda mais próxima ao contexto da Engenharia de Produção. Com tal objetivo, buscar-se-á a aplicação de conceitos financeiros no contexto empresarial. Mais especificamente, serão explorados os riscos associados ao contágio de liquidez financeira entre empresas de setores diferentes da economia, que, ligadas por grupos de credores em comum, podem ser afetadas no que diz respeito à probabilidade de rolagem de dívidas com estes credores assumidas. Por fim, os parâmetros envolvidos no fenômeno serão testados através de análises de sensibilidade, a fim de se identificar quais deles mais contribuem para sua indesejada ocorrência e em que magnitude isto ocorre.

Este capítulo prefaciará o estudo ao apresentar o problema abordado e a motivação do trabalho. Também servirá para introduzir o objetivo do mesmo e, por fim, elencar os capítulos que compõem sua estrutura.

1.1 Problema e Motivação

A motivação deste trabalho surgiu quando o autor, ao realizar o programa de Duplo Diploma na *Technische Universität Darmstadt*, Alemanha, através de uma palestra, tomou conhecimento da crise financeira asiática de 1997-98.

Tratava-se de uma crise originada na Tailândia, que levou o país a transformar seu câmbio, antes fixo, em flutuante, ante a falta de reservas estrangeiras necessárias à manutenção da taxa fixa da moeda local, o *baht*. Na ocasião, o grande débito internacional presente na estrutura do país levou-o à falência antes mesmo que uma crise cambial o fizesse. A crise então se espalhou através de contágio financeiro por outros países do sudeste asiático, como Indonésia, Coreia do Sul, Hong Kong, Malásia, Laos e Filipinas, além do Japão, causando desvalorização monetária, das bolsas de valores e de ativos empresariais, assim como um grande aumento no volume de débitos privados. A princípio pensou-se que se tratava de uma crise sem precedentes, com causas diversas àquelas presentes em crises internacionais anteriores. No entanto, hoje se trabalha com o consenso de que o cerne do problema foi representado por uma crise de liquidez, um clássico das finanças presente em diversos outros contextos, como as crises no Chile, em 1982, e no México, em 1994. Uma crise de liquidez é, de maneira simplificada, deflagrada por um descompasso entre ativos e passivos dos países envolvidos.

A crise existiu, portanto, em um contexto internacional, preponderantemente macroeconômico. O autor perguntou-se, então, como tal problemática poderia emergir num contexto mais familiar à Engenharia de Produção. O que acontece, por exemplo, quando uma empresa qualquer apresenta um descompasso semelhante entre seus ativos e suas obrigações para com terceiros, de modo que passa a não mais conseguir quitar suas dívidas no curto prazo? Seria possível a ocorrência de um contágio, nos moldes da crise asiática, também entre empresas? Em caso afirmativo, como se dá exatamente este contágio e como poderiam as empresas reduzir ou mitigar um risco como esse? Acredita-se que os conhecimentos adquiridos em disciplinas como Contabilidade e Custos e Engenharia Econômica e Finanças, além daquelas cursadas no exterior, como Microeconomia II, Macroeconomia II e Direito Internacional Empresarial II, constituem um valioso arcabouço de conhecimento que

apresentam o potencial de auxiliar o autor a preencher o hiato entre a liquidez geral de mercado e a liquidez do financiamento empresarial.

Nota-se a importância desta temática em exemplos ocorridos nos mercados. Um deles ocorreu na própria crise coreana. Em 1997, a empresa Hanbo Steel Group, grande conglomerado sul-coreano do setor de metalurgia, declarou falência. Alguns meses depois, a empresa Jinro, maior grupo de bebidas alcoólicas do país, teve o mesmo destino. As empresas não pertenciam ao mesmo setor; no entanto, havia algo em comum entre elas: o compartilhamento de um mesmo grupo de credores. O objetivo do trabalho, portanto, consiste em investigar casos como este e desvendar quais os parâmetros que mais influenciam este processo.

1.2 **Objetivo**

Ao longo deste trabalho será desenvolvido um modelo capaz de simular a ocorrência de contágio financeiro entre empresas quaisquer, com a única condição de que as mesmas possuam um grupo de credores em comum. Deseja-se mostrar a relevância de conceitos financeiros para empresas não necessariamente inseridas diretamente no âmbito das finanças e, com isso, se destacar a flexibilidade dos conceitos estudados ao longo do curso de Engenharia de Produção.

Por um lado, empresas em geral se esforçam para manter uma estrutura de dívidas equilibrada, a fim de manter possível a aquisição de créditos para investimentos e/ou expansão. Por outro lado, instituições financeiras, credoras destas mesmas empresas, procuram maximizar o retorno de seus empréstimos ao mesmo tempo em que buscam reduzir o risco associado a eles. Precisam, portanto, decidir quando emprestar e, por vezes, quando rolar uma dívida, ou seja, estender o prazo de pagamento mediante pagamento de juros. Ao realizar transações no mercado, tais credores observam o mesmo em busca de tendências. Assim, um credor racional observa o desenrolar de transações e pode mudar suas variáveis de decisão de acordo. Como veremos ao longo do trabalho, há casos em que um credor observador, ao observar o processo de rolagem de uma empresa A, consegue tirar conclusões acerca da predisposição de outro grupo de credores em relação ao mercado, alterando assim sua própria percepção. Quando esta percepção é afetada dessa maneira, fazendo com que sua

postura em relação a uma decisão de rolagem de dívida de uma empresa B seja alterada negativamente, falamos que houve contágio de uma crise de liquidez da empresa A para a empresa B.

O objetivo do presente trabalho pode ser definido, portanto, como a determinação dos principais fatores que contribuem para ou limitam a probabilidade da ocorrência de uma crise de liquidez e, no caso de crise, quais deles contribuem para a ocorrência de contágio financeiro entre empresas ligadas por credores em comum.

1.3 Estrutura do Trabalho

Com o intuito de se investigar essa problemática, serão desenvolvidos os capítulos brevemente descritos nesta seção.

- Capítulo 0 – Revisão Bibliográfica. Neste capítulo, realizar-se-á uma revisão bibliográfica para se ressaltar a importância da temática e se estabelecer um contexto de trabalho. Conceitos importantes ao trabalho serão investigados, a saber: a definição de risco e suas variações, os tipos de liquidez, contágio financeiro e teoria dos jogos e jogos globais.
- Capítulo 3 – O Modelo de Oh. Aqui será exposto um modelo matemático, desenvolvido por Oh (2013), que serve como base para o problema investigado de uma maneira bem específica. Trata-se da modelagem de contágio financeiro de uma crise de liquidez entre duas empresas não financeiras, não relacionadas entre si, através da teoria dos jogos globais.
- Capítulo 4 – Uma Proposta de Modelo – Metodologia. Aqui é exposta a metodologia proposta para a solução do problema estudado, cujo produto final é a adaptação do modelo anteriormente proposto, mais próxima à realidade e apta a responder as perguntas do trabalho.
- Capítulo 5 – Resultados. Neste capítulo, proceder-se-á à aplicação do modelo adaptado e à exposição dos resultados obtidos. Diferentes análises de sensibilidade serão realizadas com o objetivo de determinar as variáveis que mais impactam o problema.

- Capítulo 6 – Discussão. Aqui serão analisados os resultados obtidos a fim de serem realizadas inferências sobre as causas subjacentes.
- Capítulo 7 – Conclusões. Finalmente, serão apresentadas as conclusões sobre a análise dos resultados, buscando-se integrar todos os elementos do trabalho. Também será tema deste capítulo as dificuldades encontradas ao longo do trabalho, possíveis trabalhos futuros e comentários finais do autor.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este Capítulo será focado no levantamento e descrição de conceitos relevantes ao estudo proposto. Com o objetivo de facilitar o tratamento do principal tema relevante ao trabalho, isto é, os possíveis impactos do contágio financeiro de crise de liquidez relativo às companhias e indústrias com dívidas de curto prazo, será primeiramente introduzido o conceito de risco financeiro em seus diferentes contextos, com ênfase no risco de crise de liquidez. Proceder-se-á então à definição de contágio financeiro, medidas utilizadas em seu estudo e resultados encontrados na literatura, bem como seus desdobramentos e relevância. Por fim, irá se explorar o conceito de teoria dos jogos, mais especificamente os chamados jogos globais, que têm papel fundamental no método posteriormente apresentado. Objetiva-se, de maneira geral, contextualizar o trabalho e destacar a importância do tema no âmbito da Engenharia de Produção, já que tanto bancos credores quanto empresas de diversos setores encontram-se passíveis e sujeitos a tais cenários.

2.1 Risco

De maneira geral, o termo risco financeiro pode ser definido como a probabilidade de que o retorno realizado seja diferente do esperado. Este risco pode estar associado à possibilidade de perder parte ou todo o investimento original. Há diferentes versões de risco, que pode ser calculado como o desvio padrão do retorno histórico, ou médio, de um dado investimento. Quanto maior o desvio padrão, fala-se num maior nível de risco. A ideia de retorno, ganho ou perda de um papel financeiro num período específico, usualmente representado em termos de percentagem, também aparece em outras definições de risco, como "a probabilidade de perdas inerentes a instrumentos financeiros, que pode impedir a habilidade de prover retornos adequados" (BUSINESSDICTIONARY, 2014; INVESTOPEDIA, 2014).

É uma ideia recorrente em finanças a relação intrínseca entre risco e retorno. Quanto maior o risco assumido em dado investimento, maior tende a ser o retorno associado a ele. Isto ocorre, pois o investidor precisa ser recompensado pelo maior risco assumido. O maior

risco também é refletido na outra direção: além de maiores retornos potenciais, é maior também o potencial de perdas.

Riscos podem ser classificados, no contexto de investimentos, em: risco de mercado, risco de liquidez, risco de crédito, risco de conjuntura, risco de imagem, entre outros (BB, 2014; FMA, 2014).

Riscos de mercado provêm de perdas que podem ser causadas por variações nas taxas de juros, cambiais, de preços acionários, de commodities, ou mesmo da inflação. O risco de taxa de juros aparece quando há flutuações na taxa de juros do mercado. Um papel sujeito a essas variações apresenta um maior nível de risco quanto maior for a sensibilidade de preço deste papel em relação à taxa de juros vigente no mercado. O mesmo pode-se dizer dos outros fatores.

Um risco de liquidez pode assumir três formas. Uma delas diz respeito a não conseguir-se realizar uma operação num tempo razoável, ou liquidar uma posição em um determinado espaço de tempo, a "liquidez de mercado". A segunda, forma de risco mais importante no presente trabalho, diz respeito à falta de recursos para se honrar compromissos assumidos com terceiros por conta de uma desconexão entre ativos e passivos, ou ainda à dificuldade de se obter fundos, a "liquidez de financiamento". Há ainda a "liquidez do banco central", um pouco mais específica e, portanto, explicada no próximo capítulo.

A outra face da moeda desta segunda variação de liquidez refere-se ao risco de crédito. Se o risco de liquidez é enfrentado pela entidade que toma um empréstimo ou assume uma obrigação, o risco de crédito é assumido ao mesmo tempo pela entidade credora. É "a possibilidade de perda resultante da incerteza quanto ao recebimento de valores pactuados com tomadores de empréstimos, contrapartes de contratos ou emissões de títulos" (BB, 2014).

Os riscos de conjuntura relacionam-se a incertezas nas condições políticas, culturais, sociais, econômicas ou financeiras do Brasil ou de outros países. De acordo com o Banco do Brasil (2014), podem assumir as formas:

- a) Risco Estratégico: relacionado às estratégias utilizadas em relação à dinâmica de negócios e à concorrência, às relações políticas do país e fora dele e às alterações econômicas;
- b) Risco-País: perdas em função de características econômicas, financeiras, políticas e sociais de países com os quais se verificam relações econômicas e;

c) Risco Sistêmico: perdas em virtude de dificuldades financeiras existentes em instituições que provoquem danos a outras.

Um resumo dos tipos de risco expostos pode ser encontrado na Figura 1.

Figura 1 – Quadro de tipos de risco

Tipo de Risco	Exemplos
Risco de mercado	Variações na taxa de juros e câmbio, alta na inflação.
Risco de liquidez	Atraso ao realizar transações ou falta de recursos para honrar compromissos.
Risco de crédito	Incerteza quanto ao recebimento de valores pactuados.
Riscos de conjuntura	Podem ser estratégicos, Risco-País ou sistêmicos.
Outros tipos de risco	Risco operacional, risco legal, risco setorial.

Fonte: Adaptado de BB (2014)

Como citado anteriormente, o tipo de risco mais relevante ao presente trabalho é o risco de liquidez. Este assunto será tratado em maior detalhe no Capítulo 2.2.

2.2 Liquidez e risco

Antes de se analisar as implicações do risco de liquidez a nível empresarial, é preciso discutir essa temática a partir de um ponto de vista mais amplo, ou seja, qual a importância da liquidez no mercado financeiro em geral.

Como brevemente mencionado anteriormente, o conceito de liquidez financeira se relaciona com a "possibilidade de um agente financeiro trocar sua riqueza por bens e serviços ou por outros ativos" (NIKOLAOU, 2009). Liquidez, portanto, traz consigo a ideia de troca, de fluxo. Assim, se um agente é impedido de realizar tais fluxos, há falta de liquidez no mercado.

A liquidez financeira é de importância fundamental no mercado financeiro. Existem, de maneira geral, três tipos de liquidez, que serão explicados mais adiante. Estas três categorias se relacionam permanentemente no mercado e possuem ligações extremamente fortes entre si. Em condições normais, elas impulsionam o mercado e agem como lubrificante nas transações, levando a um ciclo virtuoso de crescimento. Em tempos de crise, turbulência ou risco de liquidez, no entanto, estas mesmas ligações fazem com que o risco se espalhe pelo mercado, levando a um círculo vicioso e potencialmente a instabilidades no mesmo.

A seguir serão definidos os três tipos de liquidez e os riscos a eles associados.

2.2.1 *Liquidez de mercado*

O primeiro tipo de liquidez, a "liquidez de mercado", diz respeito à habilidade de negociar um ativo no curto prazo, com baixo custo transacional e pequeno impacto em seu preço. Nas palavras de Keynes (1930), a liquidez de mercado "incorpora elementos de volume, custos de transação e tempo", em outras palavras, tem profundidade, rigidez e resiliência. Um mercado é profundo quando grandes volumes de transação afetam pouco o preço dos ativos negociados; é rígido quando os preços das transações não divergem em demasia do preço médio de mercado do ativo; e é resiliente quando desequilíbrios são rapidamente ajustados.

Em contrapartida, o risco de liquidez de mercado existe quando inexiste a possibilidade de se negociar um ativo com velocidade e a um preço justo. Este pode ser visto como o componente sistemático, não diversificável do risco de liquidez. Por assim o ser, este risco deve ser precificado, ou seja, os custos dos ativos em questão devem refletir os riscos de liquidez envolvidos através de um prêmio pelo risco assumido. Apesar de normalmente baixos, riscos de liquidez sistêmicos, ou seja, que afetam todo o mercado, podem levar a sérias crises e instabilidades financeiras.

2.2.2 *Liquidez de financiamento*

A liquidez de financiamento pode ser definida como a capacidade de financiar crescimentos em ativos e quitar obrigações conforme elas atingem seus vencimentos (BIS, 2008). Por estarem em uma posição no mercado de facilitadores, ou transformadores de depósitos de curto prazo em empréstimos de longo prazo, bancos estão excepcionalmente sujeitos a problemas de liquidez. Isso se deriva da vulnerabilidade em que se encontram, frente à possibilidade da quantidade demandada em um dado momento ultrapassar sua capacidade de obter novos financiamentos ou liquefazer ativos. A gestão de risco de liquidez, neste contexto, busca fazer com que os bancos possam continuar a quitar suas dívidas "a um preço razoável".

O risco de liquidez de financiamento pode ser definido também com uma perspectiva temporal em mente, ou seja, como a possibilidade de que, dentro de um intervalo de tempo específico, o banco se tornará incapaz de quitar suas obrigações de maneira imediata. Isto virá a ser importante no modelo proposto neste trabalho, em que o risco será avaliado no intervalo específico de um ano, e a liquidez será um conceito binário: no fim do intervalo de tempo proposto, a empresa será ou não capaz de quitar sua dívida em todo o seu montante. No entanto, o risco de liquidez permanece como um conceito contínuo, podendo assumir infinitos valores diferentes. O credor, então, deverá decidir por rolar ou não a dívida ao estimar o risco de liquidez da empresa em questão.

A medição deste tipo de risco está longe de ser direta ou trivial. Há métodos que utilizam desde balanços estáticos até testes de *stress* e construção de cenários. Drehmann e Nikolaou (2013) propõe um método de medição de risco indireto, a partir dos lances de bancos em leilões conduzidos pelo banco central, que revelariam uma aproximação do risco assumido por esses bancos no horizonte de tempo de uma semana. No presente trabalho, não obstante, será sugerido outro método, adaptado para o contexto empresarial, e não bancário (ver Capítulo 4).

Desenvolvimentos recentes acabaram por mudar radicalmente a dinâmica dos mercados financeiros. Inovações nestes mercados mudaram também, portanto, a natureza da gestão de risco de liquidez. Bancos gravitaram para modelos de financiamento baseados em grande parte no mercado de capitais, em oposição aos clássicos depósitos no varejo, aqueles

muito mais voláteis, por natureza, do que estes. Outro fator importante foi um aumento drástico da complexidade de certos instrumentos financeiros, levando a um correspondente aumento da exigência de colaterais e de incertezas. Finalmente, transações cada vez mais instantâneas e internacionalizadas causaram um expressivo aumento do potencial de impacto entre diferentes mercados de maneira cada vez mais acelerada, temática abordada na Seção 2.3 do presente trabalho.

A ainda recente crise deflagrada em agosto de 2007, por exemplo, apresentou características típicas dos desenvolvimentos supracitados. Na ocasião, houve contração da liquidez em certos mercados de produtos estruturados (produtos financeiros cujo rendimento e risco resultam da combinação de produtos diferentes) e no setor bancário, levando a crises de liquidez de financiamento e eventualmente à necessidade de intervenção por parte de bancos centrais. Isso evidenciou a forte correlação entre a liquidez de mercado e a liquidez de financiamentos, além de provar mais uma vez que a liquidez é um dos fatores determinantes para a saúde do mercado financeiro.

2.2.3 *Liquidez do Banco Central*

Como já levantado, problemas relacionados ao aumento de risco de liquidez, tanto de mercado quanto de financiamento, por vezes exigem a intervenção dos bancos centrais. Uma de suas funções é justamente contribuir para a liquidez do mercado. Essa habilidade é o que pode ser definido como liquidez do banco central e também pode ser vista como um fluxo de liquidez, ou base monetária, do banco central para o mercado. Base monetária esta que compreende a totalidade do dinheiro em circulação e em poder do banco central.

Assim, a liquidez do banco central resulta da gestão de seus ativos em balanço em relação a sua postura na política monetária. Em outras palavras, a política monetária define uma taxa de juros alvo. O banco central então realiza operações no mercado de modo a influenciar sua liquidez e, por conseguinte, garantir que a taxa de juros interbancária se aproxime desse alvo (ECB, 2011).

A soma de seus ativos, portanto, deve equivaler à soma do déficit de liquidez do sistema, ou seja, a soma dos fatores autônomos e de reservas. Um modelo simplificado de um balanço de um banco central pode ser encontrado na Figura 2.

Figura 2 – Esquema do balanço patrimonial de um banco central

Ativos	Passivos
Operações no mercado (Provisão de liquidez para o mercado financeiro)	Fatores autônomos líquidos (notas bancárias + depósitos do Governo - ativos líquidos estrangeiros + outros fatores líquidos) Reservas (obrigatórias + excesso)

Fonte: Adaptado de NIKOLAOU (2009)

2.3 Contágio financeiro

O contágio entre entidades financeiras já foi extensamente estudado (KAUFMAN, 1994; CIFUENTES, FERRUCCI *et al.*, 2005; LEITNER, 2005). O contágio entre empresas não financeiras, no entanto, não recebeu tanta atenção. Sua importância, no entanto, não deve ser menosprezada. Apesar de sua probabilidade de ocorrência no meio bancário ser maior e também o serem seus impactos, é de grande interesse das empresas em geral que este fenômeno seja mais bem compreendido, para que se possam avaliar as alternativas em seu tratamento e que as dificuldades a ele associadas possam ser contornadas.

Nesta Seção será explorada a bibliografia existente acerca do contágio financeiro, não somente porém principalmente aquela ocorrente entre bancos no sistema financeiro, já que os estudos acerca da mesma são mais abundantes.

2.3.1 *Definição*

Apesar de não haver consenso sobre a exata definição de contágio, há algumas definições que podem ser consideradas.

A primeira definição descreve "um significativo aumento na probabilidade de ocorrência de crise em um país, condicionado a uma crise em outro país". Percebe-se que o foco aqui é macroeconômico, não se fala em empresas, tampouco em instituições financeiras

ou bancárias. Ela se refere a crises de taxas de câmbio que podem se propagar através de países distintos. Poderia se originar a partir de choques comuns aos países, relações de comércio, comportamento irracional ou até mesmo mudanças nas políticas monetárias dos países envolvidos.

A segunda definição trata da "transmissão da volatilidade de preços de ativos de um país em crise para outros". A volatilidade de preços de ativos pode ser encarada como uma aproximação da incerteza presente em determinado mercado. Assim, esta definição pode ser interpretada como a transmissão, ou contágio, de incerteza através de mercados.

Uma terceira definição descreve contágio como "uma situação em que movimentos correlatos de valores de ativos em países distintos não podem ser explicados por fundamentos econômico-financeiros". Esta definição é apropriada ao se analisar modelos de problemas de coordenação que permitem o surgimento de múltiplos equilíbrios instantâneos. Esta definição também pode se aplicar, porém, a casos em que problemas de coordenação entre agentes econômicos não estão associados a mecanismos arbitrários de seleção de equilíbrios. Nos modelos mais usuais de crises cambiais, a introdução de informações incompletas no modelo eliminam equilíbrios múltiplos. Assim, pequenas mudanças nos sinais privados divulgados aos agentes podem levar a grandes variações no comportamento dos mesmos. Esta definição nos é importante, já que o modelo estudado nos próximos capítulos utiliza justamente a premissa de informação incompleta para evitar a ocorrência de múltiplos equilíbrios.

Uma quarta definição dá conta de um fenômeno de "aumento significativo do movimento correlato de preços e quantidades em diversos mercados, condicionado a uma crise em um ou vários mercados". Esta definição é a que melhor se encaixa no que ocorreu na crise asiática de 1997 e reflete o que comumente se pensa a respeito de contágio, uma modificação expressiva em relação a certo padrão histórico (PERICOLI e SBRACIA, 2003).

Finalmente, uma quinta definição afirma que "contágio ocorre quando um canal de transmissão se intensifica ou, mais genericamente, se modifica após um choque no mercado".

2.3.2 *Medidas empíricas*

Relacionadas às definições expostas acima, medidas empíricas da ocorrência de contágio podem ser explícita ou implicitamente obtidas com as seguintes metodologias, descritas por Pericoli e Sbracia (2003).

2.3.2.1 Mudanças na probabilidade de crises cambiais

Aqui a metodologia consiste na definição de um indicador representado pela média ponderada das alterações nas taxas de câmbio, juros de curto prazo e reservas internacionais. Diz-se então que um dado país entra em crise quando esse indicador sofre uma alteração significativa de, digamos, dois desvios padrão. A partir disso é possível então verificar como a crise em um país afeta negativamente a probabilidade de crise em outro país.

A premissa deste trabalho se ancora em uma medida similar a esta. No entanto, em vez da probabilidade de crise cambial, o que se buscará medir indiretamente é a mudança na probabilidade de crise de liquidez na empresa afetada pelo contágio. Em vez de se trabalhar com um indicador para a ocorrência de crise, a crise se caracterizará pela decisão de não rolagem da dívida por parte dos grupos de credores, colocando automaticamente a empresa em questão em uma situação de crise de liquidez. Após a simulação com o auxílio do modelo, portanto, obter-se-á a probabilidade de contágio do processo, ou seja, a probabilidade de que uma segunda empresa seja afetada negativamente pela crise ocorrida na primeira.

2.3.2.2 Repercussões de volatilidade

Relacionado à segunda definição de contágio exposta, este tipo de metodologia procura modelar a transmissão de alterações de volatilidade através da estimativa de modelos GARCH multivariados. Considerando-se o processo:

$$R_t = A + B\mathbf{f}_t + U_t, \quad U_t \sim (0, \Sigma_t) \quad (1)$$

$$\Sigma_t = C'C + D'\Sigma_{t-1}D + E'U'_{t-1}U_{t-1}E,$$

onde $R = [r_1, \dots, r_n]'$ é um vetor de taxas de desconto, $A = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]'$ é um vetor de constantes, B é uma matriz $n \times k$ de cargas e $\mathbf{f} = [f_1, \dots, f_k]'$ é um vetor de fatores globais. O vetor de choques específicos $U = [u_1, \dots, u_n]'$ tem uma matriz de covariância Σ , onde C , D e E são matrizes de números constantes.

Uma vez estimado o processo, é possível estimar como um choque $u_{i,t}$ afeta a volatilidade do país i , a covariância entre os mercados i e j e a volatilidade do país j .

2.3.2.3 Saltos entre equilíbrios múltiplos

Outra abordagem para a modelagem de contágio utiliza os modelos transitórios de Markov. Estes modelos definem regimes com base em variáveis econômicas relevantes e então calculam as probabilidades (através de matrizes de transição de Markov) do sistema se mover de um regime para o outro. Descontinuidades podem então ser atribuídas a estes saltos entre pontos de equilíbrio. Um problema relacionado a este tipo de modelo é que o número de regimes utilizado é arbitrário.

2.3.2.4 Correlações nas taxas de retorno

Na quarta definição apresentada, falou-se do movimento correlato em mercados financeiros. Seja um modelo de fator único com variância constante:

$$\begin{aligned} r_i &= \alpha_i + \beta_i \cdot f + u_i \\ r_j &= \alpha_j + \beta_j \cdot f + u_j, \end{aligned} \quad (2)$$

com $\beta_i > 0$, $\beta_j > 0$ e onde f , u_i e u_j são variáveis não correlacionadas e aleatórias. A correlação entre r_i e r_j pode ser escrita como

$$\text{Corr}(r_i, r_j) = \frac{1}{\left(1 + \frac{\text{var}(u_i)}{\beta_i \cdot \text{var}(f)}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{\text{var}(u_j)}{\beta_j \cdot \text{var}(f)}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (3)$$

Dessa forma, a ocorrência de contágio pode ser identificada quando o movimento correlato de preços de ativos é mais forte do que o que poderia ser explicado pela variação do fator global f .

2.3.2.5 Mudanças no mecanismo de transmissão

Modelos que procuram captar mudanças no mecanismo de transmissão introduzem o fator ε no modelo de fatores visto em (2):

$$\begin{aligned} r_i &= \alpha_i + \beta_i \cdot f + \gamma_i \cdot \varepsilon + \varepsilon_i \\ r_j &= \alpha_j + \beta_j \cdot f + \gamma_j \cdot \varepsilon + \varepsilon_j, \end{aligned} \quad (4)$$

com f , ε , ε_i , ε_j mutuamente não correlacionados e aleatórios, de maneira que o contágio ocorre quando um choque ε torna-se um fator global (quando $\gamma_j \neq 0$).

2.3.3 *Modelos de contágio*

Podem ser identificados quatro tipos de modelo para o estudo do contágio financeiro. O primeiro deles inclui modelos probit e logit, nos quais o choque inicial é um valor extremo para um indicador de pressão especulativa, e modelos que utilizam a abordagem dos "indicadores principais", que busca identificar um grupo de índices para captar a

vulnerabilidade a choques internos e externos, a fim de prever crises monetárias. O segundo tipo de modelo, modelos GARCH, trata da transmissão de choques de volatilidade. Um terceiro tipo, modelos Markov, testam diretamente a presença de múltiplos equilíbrios. Finalmente, há modelos que levam em conta rupturas de correlação.

2.3.3.1 Modelos probit e logit e indicadores principais

Um dos modelos construídos (EICHENGREEN, ROSE *et al.*, 1996) consiste na aplicação de um índice de pressão de mercado de taxa de câmbio (ERP - *Exchange rate market pressure*), uma média ponderada da alteração da taxa de câmbio, taxa de juros de curto prazo e reservas internacionais. Uma variável *dummy* de crise dependente desses fatores é definida como 1 para valores extremos de ERP e 0 caso contrário. A partir disso é aplicado um modelo logit, cujos resultados apontam um aumento de 8 pontos percentuais na probabilidade de crises especulativas em países decorrentes de crise em outro país.

Berg e Pattillo (1999) e Berg *et al.* (1999) obtiveram indicadores compostos através de estimativas baseadas em modelos probit com indicadores individuais como variáveis independentes.

Alguns sistemas com indicadores principais avaliam variáveis relacionadas ao fenômeno de contágio, como o número de crises em outros países e indicadores regionais. Em alguns casos, indicadores provêm do chamado canal de credores em comum e possibilitam a construção de modelos com bons resultados em termos de previsão de crises e adequação à realidade.

Van Rijckeghem e Weder (2001) analisaram a vulnerabilidade advinda de um credor em comum. Quando um grupo de países depende fortemente de um mesmo credor, uma crise observada em qualquer um destes países pode levar a uma interrupção de crédito por parte deste credor, levando a um problema de crédito (ou liquidez) nos demais países. Uma abordagem muito próxima a esta será verificada na continuidade deste trabalho. Em vez de múltiplos países, duas empresas não financeiras serão observadas quanto suas dívidas. No lugar de um único credor, dois grupos de credores com características potencialmente distintas participarão do processo.

A lógica, no entanto, permanece a mesma. A constatação de crise em uma das empresas é o primeiro passo para que a confiança dos grupos de credores diminua, afetando negativamente, isto é, aumentando a probabilidade de crise na segunda empresa.

2.3.3.2 Modelos GARCH

Modelos GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic) buscam verificar a ocorrência do contágio de variações na volatilidade de ações entre mercados de diferentes países. Hamao *et. al.* (1990) encontraram evidências de contágio no *crash* do mercado acionário em 1987. Segundo os autores, houve repercussões de volatilidade dos mercados americano e inglês para o mercado japonês. Engle *et. al.* (1990) analisaram a volatilidade da taxa de câmbio yen/dólar no mercado japonês, a fim de verificar se a mesma poderia ser explicada por fatores internos ou por choques de volatilidade advindos de outros países. Apesar de a primeira hipótese ser mais significativa na maior parte das vezes, foi encontrada evidência de que a segunda hipótese, do contágio de volatilidade de outros países, também é significativa em alguns casos.

2.3.3.3 Modelos alternantes de Markov

Para tratar problemas modelados com a possibilidade de múltiplos equilíbrios é utilizado o modelo de Markov, desenvolvido por Hamilton (1994) e outros. Com sua aplicação é possível modelar descontinuidades típicas a estes cenários. Uma matriz de transição de Markov pode então ser derivada com valores de probabilidade de transição de um estado para outro na economia.

Resultados obtidos com a aplicação de tais modelos incluem a constatação, no contexto cambial francês em relação ao marco alemão, de que a situação de maior probabilidade de desvalorização era a mais provável, uma vez que a zona de múltiplos equilíbrios fosse adentrada (JEANNE, 1997), a conclusão de que movimentos bruscos da taxa cambial estão relacionados a saltos entre estados de equilíbrio (JEANNE e MASSON, 2000) e

a verificação de que a inclusão de indicadores diretos de contágio (integração) melhora a aderência de tais modelos (FRATZSCHER, 1999).

2.3.3.4 Estudos de rupturas de correlação

Modelos de rupturas de correlação analisam como a matriz de correlação entre países pode ser alterada a partir do aumento de volatilidades de preços em um determinado país. Resultados encontrados na bibliografia incluem o maior efeito de más notícias (crises) em relação a boas notícias relativas aos preços de mercado. Em geral, estudos que utilizaram este modelo encontraram poucos casos de contágio entre os casos estudados (KING e WADHWANI, 1990; BOYER, GIBSON *et al.*, 1997; FORBES e RIGOBON, 2002).

2.3.4 *Dois tipos de contágio bancário*

No âmbito financeiro, a falência ou quase falência de um banco pode levar a um efeito dominó entre outros bancos e do sistema financeiro como um todo. Neste contexto, o risco de contágio em larga escala no sistema bancário é visto como um risco sistêmico. Uma falência bancária poderia levar a uma redução da confiança pública no sistema bancário como um todo e assim levar à falência de outros bancos. Por ser sistêmico, é frequentemente argumentado que os bancos devem sofrer regulação do Estado. Assim, o contágio financeiro é visto como o maior responsável pela ação regulatória governamental sobre os sistemas bancários.

Em seu artigo de 1983, Joseph Aharony e Itzhak Swary diferenciaram dois tipo de contágio. O primeiro, denominado "contágio puro", seria aquele efeito dominó em que a causa da primeira falha não é relevante nem correlacionada entre os bancos afetados. Exemplos seriam fraudes e perdas decorrentes de investimentos de alto risco específicos a um determinado banco. Assim, o contágio que seguiria uma falha desse tipo não poderia ser atribuído a uma causa comum aos bancos.

Um segundo tipo de falência bancária, por outro lado, poderia se originar de um problema compartilhado entre os bancos, seja ele uma informação adversa ou uma condição mercadológica comum a todos eles. Neste caso, os bancos desta maneira correlacionados

seriam todos afetados negativamente. Um contágio ocorrente nestas condições é denominado contágio "baseado em sinais" (AHARONY e SWARY, 1983).

No âmbito deste trabalho, o tipo de contágio estudado será estritamente o chamado "contágio puro", porém com o foco desviado do contexto bancário. Apesar de agentes financeiros também estarem presentes, o foco será o contágio através de empresas não financeiras ligadas a estes agentes através de contratos de crédito. Mais especificamente, serão analisadas crises de liquidez originadas no desequilíbrio entre valores de ativo e passivo de curto prazo nas empresas estudadas e de sua reduzida capacidade de cumprir com suas obrigações para com os grupos credores. Assim, o estopim da crise não possui uma correlação entre empresas (o motivo do desequilíbrio no balanço é específico à empresa) e o efeito dominó é desencadeado exclusivamente pela mudança na percepção dos agentes financeiros acerca das empresas.

2.4 Teoria dos jogos e jogos globais

Esta seção se destina a descrever os conceitos fundamentais por trás da teoria dos jogos e de um conjunto de jogos agrupados sob a teoria dos jogos globais, subárea da teoria dos jogos que foi utilizada por Oh (2013) no modelo descrito no próximo capítulo.

A teoria dos jogos é uma área dedicada ao estudo da tomada de decisões. Relaciona-se àquilo que tange "a construção de modelos matemáticos de conflito ou cooperação entre tomadores de decisão racionais" (MYERSON, 1991). Possui diversas aplicações nas áreas de economia, ciências políticas, lógica, biologia e psicologia. A premissa básica adotada é o fato as regras do jogo, que incluem tanto os retornos esperados quanto a racionalidade dos jogadores são de conhecimento comum.

2.4.1 Desenvolvimento histórico

As primeiras discussões acerca de jogos entre duas pessoas podem ser atribuídas a James Waldegrave, em uma carta datada de 1713 (BELLHOUSE, 2007). Nela, Waldegrave descreve a solução de uma estratégia mista de minimax com dois jogadores de um jogo de

cartas. Em 1838, Antoine Cournot considerou um problema de duopólio e apresentou uma solução, hoje considerada uma versão restrita do equilíbrio de Nash, aquela situação em que nenhum dos jogadores adquire uma vantagem através da mudança unilateral de sua estratégia (COURNOT e FISHER, 1897).

A teoria dos jogos como área de estudos por si só surgiu, no entanto, com a publicação do artigo de John von Neumann (1928), no qual o autor construiu conjuntos convexos através do teorema do ponto fixo de Brouwer em mapeamentos contínuos, prática que veio então a ser um método padrão em teoria dos jogos. Nas décadas seguintes os estudos se concentraram primordialmente em jogos cooperativos, nos quais os jogadores buscariam estratégias mutuamente benéficas, com a premissa de que eles poderiam garantir o cumprimento dos acordos realizados com esse intuito.

Em 1950, Merrill Flood e Melvin Dresher apresentaram a primeira formulação matemática do famoso dilema do prisioneiro. Um problema análogo e de importantes desdobramentos envolve a estratégia nuclear, de modo que os países (no caso EUA e URSS) participam de um jogo de soma diferente de zero, em que a estratégia ótima do ponto de vista individual (lançar a bomba atômica para aniquilar o país adversário) difere daquela do ponto de vista global (não lançar a bomba e conviver com a Guerra Fria).

Concomitantemente, John Nash desenvolvia um critério de consistência mútua entre dois jogadores e suas estratégias, conhecido como equilíbrio de Nash. Com ele, Nash unificou jogos cooperativos e não cooperativos.

2.4.2 *Forma normal*

A forma mais simples da teoria dos jogos consiste em dois jogadores, duas estratégias e uma matriz de retornos. De maneira simplificada, pode ser descrita como uma função que estabelece um retorno para cada combinação de estratégias escolhidas pelos dois jogadores. Aqui a premissa é de que ambos os jogadores escolhem suas estratégias simultaneamente e sem o conhecimento da escolha do adversário.

2.4.3 *Forma extensiva*

A forma extensiva pode abranger mais de uma tomada de decisão e diversos jogadores. Ela é representada na forma de uma árvore de decisão, na qual os retornos são posicionados na base da árvore e cada nó corresponde à tomada de decisão de um dos jogadores. Toda forma extensiva pode ser representada na forma normal, porém o tamanho da representação normal cresce de forma exponencial com a complexidade do jogo na forma extensiva, tornando-se rapidamente impraticável computacionalmente.

2.4.4 *Jogos globais*

A principal crítica à teoria dos jogos convencional descrita nas últimas seções é justamente a desconfiança em relação à sua premissa básica, o conhecimento geral das regras do jogo e da estrutura de retornos. Os agentes teóricos da teoria dos jogos seriam muito mais bem informados do que seus pares no mundo real. Tentativas para contornar este problema foram realizadas por Harsanyi (1973), através da introdução de retornos aleatórios, e por Selten (1975), com a introdução de perturbações na estrutura de informação e racionalidade.

Carlsson e van Damme (1993) propuseram um modelo desafiando as mesmas premissas e o denominaram "jogos globais". Nele, a natureza escolhe aleatoriamente um jogo 2 x 2 de um grupo suficientemente grande de jogos 2 x 2 suficientemente diferentes entre si em sua estrutura de retornos. Os jogadores recebem, então, sinais com ruídos acerca dos retornos deste jogo. Assim, são introduzidas informações incompletas no modelo.

Os resultados do modelo indicam que, pelo fato de que ambos os jogadores realizam observações simultâneas, porém com ruídos (perturbações), e, portanto, correlacionadas, sua estratégia depende de sua observação. Em outras palavras, o jogador, ao observar o jogo com ruído, não consegue determinar exatamente de qual deles se trata, sendo forçado a considerar toda uma gama de possíveis jogos com diferentes retornos em sua estratégia e tomada de decisão.

Outro ponto em que jogos globais diferem da teoria dos jogos tradicional também se deriva da introdução de informação incompleta. Trata-se do número de equilíbrios possíveis.

O problema de múltiplos equilíbrios surge quando a característica completa da informação permite a existência de dois equilíbrios de Nash. Carlsson e van Damme mostraram que na medida em que os ruídos introduzidos tornam-se pequenos, o jogo é reduzido a apenas um equilíbrio. Mais ainda, é possível demonstrar que o equilíbrio a que o jogo é reduzido é sempre dominante em risco (aquele que maximiza o retorno esperado na incerteza) e que este resultado independe da distribuição adotada para o ruído do sinal.

Frankel *et. al.* propõem ainda uma generalização para os resultados de Carlsson e van Damme. Nela, os resultados obtidos para dois jogadores são ampliados, com algumas ressalvas, para um número finito qualquer de jogadores. Além disso, o modelo é relaxado para abranger grupos contendo um contínuo de jogadores, cada qual podendo apresentar uma característica diferente. Esse dispositivo pode captar, por exemplo, a presença de jogadores mais ou menos importantes (maiores ou menores). No presente trabalho, esse é o dispositivo que permitirá a captura de credores, ou grupos de contínuos de credores, com diferentes posturas em relação ao mercado, mais especificamente, credores que fazem uso de diferentes taxas de retorno para avaliar o risco de projetos. Uma comparação entre a teoria dos jogos tradicional, com informações completas, e a teoria dos jogos globais, com informação incompleta, pode ser encontrada na Figura 3.

Figura 3 – Comparação entre teoria dos jogos clássica e jogos globais (resumo)

	Teoria dos jogos tradicional	Teoria dos jogos globais
Retorno	Conhecimento comum	Incerto
Estratégia	Conhecimento comum	Pode depender da observação
Informação	Completa	Incompleta
Equilíbrios	Permite, em geral, múltiplos equilíbrios	Reduz-se a apenas um equilíbrio dominante em risco

Fonte: Elaborado pelo autor. Adaptado de Franke *et. al.* (2003)

2.4.5 *Jogos globais e contágio*

Podemos agora estabelecer um paralelo entre os resultados obtidos nos artigos estudados e o modelo proposto por Oh (2013) descrito no próximo Capítulo. De maneira similar, ambos os jogadores, no caso os grupos de bancos credores, recebem sinais com ruído

acerca dos fundamentos das empresas relevantes, caracterizando a presença de informações incompletas. Essa característica ressoa de forma positiva na realidade, visto que dificilmente credores obtêm informações 100% precisas e em tempo real acerca das empresas. Isto, de acordo com Carlsson e van Damme, leva a um único equilíbrio dominante, que pode então ser calculado com base na matriz de retornos da Figura 5, vista no próximo Capítulo. A partir da generalização de Frankel *et. al.* (2003), é possível ainda manter os dois grupos de credores descritos como um contínuo de jogadores, o que contribui para a adesão do modelo à realidade.

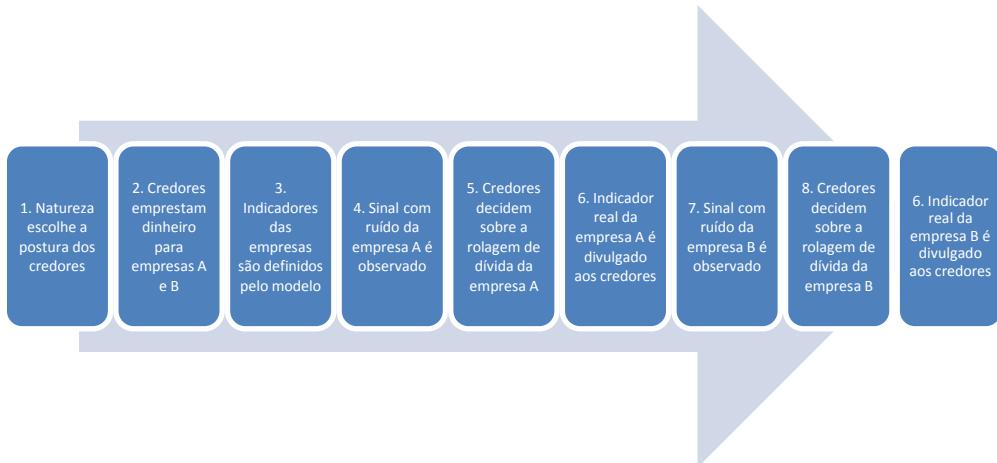
3 O MODELO DE OH (2013)

O artigo em que se baseia parte do presente trabalho foi desenvolvido por Oh (2013) e buscou modelar o problema de contágio de uma forma não tão usual: a propagação de uma crise de liquidez através de empresas não financeiras, ligadas por grupos de credores em comum. A análise deste artigo se dará da seguinte forma: primeiramente, será descrito o modelo como construído pelo autor. Em seguida, serão discutidas suas conclusões mais importantes. Finalmente, será explicado em que medida o modelo será modificado para os propósitos deste trabalho.

3.1 Descrição do modelo

O modelo definido por Oh possui um caráter linear no tempo. Ele é composto por duas empresas (A e B), que, para iniciar seus projetos, dependem exclusivamente de empréstimos financeiros junto a credores (bancos). Inicialmente, nenhuma das empresas possui qualquer capital para estes projetos, de modo que tomam o mesmo emprestado de dois grupos de credores (1 e 2), que podem apresentar dois tipos de postura: pessimista ou otimista. Um indicador da saúde financeira de cada empresa no momento do vencimento das dívidas (θ_i , $i = A, B$) é então definido internamente no modelo. Em seguida, os credores observam no mercado um sinal, com ruído, da saúde financeira da empresa A, decidindo em seguida se rolam ou não sua dívida. O valor real do indicador da saúde financeira utilizada pelos credores é então divulgado ao mercado e conhecido por todos os credores. O mesmo procedimento, em seguida, é realizado para a empresa B. Um resumo desta cronologia pode ser observado na Figura 4.

Figura 4 – Etapas do modelo de contágio



Fonte: Elaborado pelo autor. Adaptado de Oh (2013)

Inicialmente, o autor definiu dois grupos de credores, sendo sua totalidade composta por pequenos credores distribuídos por um contínuo entre 0 e 1, de tal forma que o tamanho de cada credor não é significativo em relação ao todo (por simplificação, trataremos cada grupo como um credor por si só, que representa o grupo), o primeiro deles, com probabilidade q de ser pessimista em relação ao mercado e de tamanho λ ($0 < \lambda < 1$), o segundo, sabidamente pessimista pelo mercado e tamanho $(1 - \lambda)$. Pode-se, alternativamente, definir o segundo grupo como otimista. Apesar de naturalmente mudar o resultado do modelo em relação à probabilidade de crise de liquidez nas empresas, esta escolha não afeta a probabilidade de contágio, por ser de conhecimento comum ao mercado. A diferenciação entre os grupos se dá através da taxa de desconto utilizada por cada um deles, que é naturalmente maior para os credores otimistas. A taxa de desconto dos credores pessimistas é denotada por δ_p , enquanto a taxa de desconto dos credores otimistas é denotada por δ_o . O autor atribui essa diferença nas taxas de desconto utilizadas a diferenças nas condições financeiras dos credores e/ou a possíveis assimetrias de informação. Isto quer dizer que credores em condições financeiras mais favoráveis e com melhores informações a respeito da situação das empresas apresenta um comportamento mais otimista e, portanto, utiliza uma taxa de desconto maior, o que significa atribuir um valor maior para o projeto das empresas em sua maturação.

O contrato de débito assumido pelas empresas junto aos credores é assumido como sendo uniforme, ou seja, idêntico para qualquer combinação empresa/credor. Ele é caracterizado, no modelo, por um valor de face, L , um valor de recuperação em caso de indeferimento da rolagem, K^* , e um valor de recuperação em caso de deferimento da rolagem

e posterior fracasso do projeto da empresa (incapacidade da empresa em cumprir com as obrigações ao fim do contrato), K_* ($K_* < K^*$). Por simplicidade, os valores serão normalizados de maneira que $K^* = K$, $K_* = 0$ e $L = 1$. Isto implica na matriz de retornos exibida na Figura 5.

Figura 5 – Quadro da matriz de retornos para credores

	Projeto bem sucedido	Projeto mal sucedido
Rolagem	$\delta_m * L = \delta_m$, m = O,P	$\delta_m * 0 = 0$
Não rolagem	K	K

Fonte: Adaptado de Oh (2013)

Antes de decidir rolar ou não a dívida para a empresa A, cada credor observa o mercado e recebe um sinal x_{ij} ($x_{ij} = \theta_i + \varepsilon_{ij}$), onde θ_i é uma medida da saúde financeira da empresa i (capacidade de quitar suas dívidas de curto prazo) e ε_{ij} é o ruído que interfere na observação do credor j em relação à empresa i, que é uniformemente distribuído no intervalo $[-\varepsilon, \varepsilon]$. O ponto crítico aqui é a escolha de θ por parte do autor como sendo uma variável aleatória. Esta escolha é conveniente por facilitar a construção do modelo e permitir o estudo do contágio de forma matemática, mas por outro lado não captura de nenhuma maneira qualquer aspecto econômico-financeiro das empresas estudadas, descolando-as da realidade. Na próxima seção será proposta uma maneira de relacionar o indicador θ de forma íntima ao desempenho financeiro da empresa mais relevante ao credor: o risco de inadimplência.

O autor utiliza então um método de otimização baseado em jogos globais para determinar um equilíbrio único para cada grupo de credores, isto é, um \bar{x}_{ij} que faz com que o credor j, ao receber um sinal x_{ij} acima deste valor, decida rolar a dívida da empresa i, e decida não o fazer caso contrário. Há também um $\bar{\theta}_i$ de equilíbrio, de modo que o projeto da empresa i falha caso θ_i seja menor do que $\bar{\theta}_i$. No contexto deste trabalho, não será analisado o comportamento da variável x_{ij} e de seus efeitos sobre a rolagem da dívida. O trabalho será focado no desenvolvimento da variável θ_i , que é crucial na determinação do sucesso dos projetos de cada empresa.

Após o resultado da rolagem (decisão por parte de cada credor), o resultado real θ da empresa A é divulgado ao mercado e o mesmo processo de rolagem de dívida é realizado para a empresa B. O resultado real θ da mesma é então divulgado ao mercado.

Oh demonstra que, após o resultado da rolagem da empresa A, há um cenário em que o grupo de credores pessimista (grupo 2) consegue determinar se o outro (grupo 1) é pessimista ou otimista. Isto é possível na medida em que é sabido que todos os credores decidem a rolagem de acordo com a mesma regra de otimização. No entanto, isso é possível se, e somente se, o desempenho real θ da empresa A se situa num intervalo específico. Este intervalo, como demonstra o autor, é compreendido entre os θ de equilíbrio para os casos em que os credores do grupo 1 são pessimistas ou otimistas ($\theta_A \in [\theta_{AO}^*, \theta_{AP}^*]$), de acordo com as fórmulas:

$$\begin{aligned}\theta_{AO}^* &= \frac{K}{\delta_P} (1 - \Sigma_1 - \Sigma_2) \text{ e} \\ \theta_{AP}^* &= \frac{K}{\delta_P} (1 - \Sigma_1),\end{aligned}\tag{5}$$

onde:

θ_{AO}^* é o θ de equilíbrio para a rolagem da dívida da empresa A caso o grupo 1 de credores é otimista em relação ao mercado;

θ_{AP}^* é o θ de equilíbrio para a rolagem da dívida da empresa A caso o grupo 1 de credores é pessimista em relação ao mercado;

K é o valor do colateral coletado em caso de indeferimento da rolagem;

$$\Sigma_1 = \frac{\lambda(1-\lambda)(1-q)(\delta_O - \delta_P)}{\delta_O(1+2\varepsilon-\lambda)};$$

$$\Sigma_2 = \frac{2\lambda\varepsilon(\delta_O - \delta_P)}{\delta_O(1+2\varepsilon-\lambda)},$$

δ_O é a taxa de desconto do credor otimista;

δ_P é a taxa de desconto do credor pessimista;

λ é a proporção de credores do grupo 1;

q é a probabilidade do grupo 1 de ser pessimista e;

ε é o parâmetro de ruído.

Neste cenário, é possível demonstrar que o grupo de credores com característica incerta rola a dívida da empresa A se, e somente se, ele é otimista. Isto se torna evidente quando analisamos a relação entre θ_A e os pontos de equilíbrio θ_{AO}^* e θ_{AP}^* . Caso θ_A é maior do que θ_{AP}^* , a empresa A não tem crise de liquidez, independentemente do tipo de credores do grupo 1. Caso θ_A é menor do que θ_{AO}^* , a empresa A tem crise de liquidez, independentemente do tipo de credores do grupo 1. No entanto, caso θ_A se situa no intervalo $[\theta_{AO}^*, \theta_{AP}^*]$, a empresa A apresenta crise de liquidez apenas quando os credores do grupo 1 são pessimistas ($\theta_A < \theta_{AP}^*$) e não passa por crise apenas quando os credores do grupo 1 são otimistas ($\theta_A > \theta_{AO}^*$).

Em um caso normal, em que não há visibilidade quanto à postura do primeiro grupo de credores, não há motivos para que a rolagem da empresa B se dê de qualquer forma diversa à rolagem da dívida da empresa A. Os credores, racionais, tomariam a decisão baseando-se estritamente nos mesmos critérios adotados para a empresa A. Assim, o processo se repetiria da mesma forma, o que não configuraria contágio financeiro.

Uma vez que a condição acima é contemplada, no entanto, e, por consequência, a postura do primeiro grupo de credores fica evidente ao mercado, a rolagem da dívida da empresa B passa a ser regida por outras regras de decisão, de acordo com as equações para θ_B^* de equilíbrio:

$$\theta_{BP}^* = \frac{K}{\delta_P} \text{ e}$$

$$\theta_{BO}^* = \frac{\gamma K}{\delta_O} + \frac{(1-\gamma)K}{\delta_P}, \quad (6)$$

onde θ_{BP}^* é o θ de equilíbrio para a rolagem da dívida da empresa B caso o grupo 1 de credores é pessimista em relação ao mercado;

θ_{BO}^* é o θ de equilíbrio para a rolagem da dívida da empresa B caso o grupo 1 de credores é pessimista em relação ao mercado;

K é o valor do colateral coletado em caso de indeferimento da rolagem;

δ_O é a taxa de desconto do credor otimista;

δ_P é a taxa de desconto do credor pessimista;

λ é a proporção de credores do grupo 1 e;

q é a probabilidade do grupo 1 de ser pessimista.

A demonstração destas e das fórmulas previamente expostas foge do escopo deste trabalho.

No caso em que o grupo incerto de credores mostra-se otimista (rola a dívida da empresa A enquanto $\theta_A \in [\theta_{AO}^*, \theta_{AP}^*]$), aumenta-se a probabilidade de rolagem de dívida da empresa B (diminui-se o θ_B de equilíbrio de θ_{AO}^* para θ_{BO}^*). Neste caso, apesar da probabilidade de ocorrência de uma crise de liquidez para a empresa B ser modificada devido ao processo de aprendizagem dos credores, ela é reduzida, ou seja, a situação da empresa torna-se mais favorável devido à postura otimista do primeiro grupo de credores e, sobretudo, à descoberta desta postura por parte do segundo grupo.

De maneira inversa, no caso em que o grupo incerto de credores mostra-se pessimista (não rola a dívida da empresa A enquanto $\theta_A \in [\theta_{AO}^*, \theta_{AP}^*]$), diminui-se a probabilidade de rolagem de dívida da empresa B (aumenta-se o θ_B de equilíbrio de θ_{AP}^* para θ_{BP}^*). Neste caso, a situação da empresa B é piorada devido ao processo de aprendizagem (a empresa precisa agora apresentar uma capacidade de cobertura de dívidas superior àquela relacionada à situação em que não há transparência em relação ao primeiro grupo de credores). Assim, caso θ_B se encontre no intervalo $[\theta_{BO}^*, \theta_{BP}^*]$, há crise de liquidez e pode-se dizer que houve um aumento da probabilidade de ocorrência da mesma para a empresa B, ou seja, houve contágio.

A conclusão do autor é, portanto, que o contágio de uma crise de liquidez da empresa A para a empresa B refere-se ao caso em que, por conta do processo de aprendizagem dos credores, a empresa B tem crise de liquidez quando $\theta_B \in [\theta_{BO}^*, \theta_{BP}^*]$ e, simultaneamente, a empresa A tem crise de liquidez quando $\theta_A \in [\theta_{AO}^*, \theta_{AP}^*]$.

3.2 Principais conclusões e desdobramentos

A primeira conclusão a que o autor chega diz respeito a o que ele denomina severidade de contágio. Este parâmetro é definido como o aumento da probabilidade de crise de liquidez para a empresa B no caso em que a postura dos credores do grupo 1 torna-se sabidamente pessimista no mercado. Portanto, a severidade de contágio pode ser expressa como:

$$SC := \theta_{BP}^* - \theta_{AP}^* = \frac{\gamma(1-\gamma)(\delta_O - \delta_P)(1-q)K}{\delta_O \delta_P (1+2\varepsilon - \gamma)} \quad (7)$$

Como quanto maior a severidade de contágio, maior o aumento na probabilidade de crise de liquidez de B, pode-se dizer que uma maior severidade de contágio leva a um aumento na probabilidade de contágio de A para B, dado que haja crise de liquidez na empresa A.

Observa-se pela equação que, quanto menor a probabilidade de crise de liquidez para a empresa A (denotada por um θ_{AP}^* menor), maior a severidade de contágio. A primeira conclusão a que chega o autor, portanto, é que uma eventual crise de liquidez verificada na empresa A é tão mais contagiosa quanto menor for a probabilidade de que esta mesma crise ocorra *ex ante*.

A segunda conclusão deriva-se da mesma definição de severidade de contágio e diz respeito ao valor do colateral, K . Observa-se que:

$$\frac{\partial SC}{\partial K} = \frac{\gamma(1-\gamma)(\delta_O - \delta_P)(1-q)}{\delta_O \delta_P (1+2\varepsilon - \gamma)} > 0 \quad (8)$$

Assim, pode-se afirmar que uma redução do valor do colateral deve promover uma redução da severidade de contágio, isto é, tornar uma eventual crise de liquidez menos contagiosa.

Uma terceira consideração do autor diz respeito aos custos de oportunidade empregados pelos credores. Considere-se a equação:

$$\frac{\partial SC}{\partial (\delta_O - \delta_P)} = \frac{\gamma(1-\gamma)(1-q)K}{\delta_O \delta_P (1+2\varepsilon-\gamma)} > 0 \quad (9)$$

Observa-se claramente que a severidade de contágio é tanto maior quanto maior a diferença entre δ_O e δ_P . Esta diferença pode ser diminuída, por exemplo, através de garantias de resgate governamentais. Através disso, a confiança no projeto da empresa B por parte de credores pessimistas pode aumentar, o que significaria um maior δ_P e uma menor severidade de contágio.

Uma análise semelhante é utilizada na quarta conclusão do autor, que diz respeito ao parâmetro de erro no sinal recebido pelos credores a respeito das empresas, ε . Segundo o autor, quanto maior a precisão das informações recebidas pelos credores (menor ε), mais contagiosa é a eventual crise de liquidez. Isto pode parecer paradoxal, mas pode-se pensar da seguinte maneira: quanto menor a imprecisão do sinal, menor se torna os valores de equilíbrio e, consequentemente, menor a probabilidade de crise de liquidez para a empresa A. Como já discutido, isso acarreta diretamente em um aumento da severidade de contágio. Este efeito pode ser observado na seguinte equação:

$$\frac{\partial SC}{\partial \varepsilon} = -\frac{2\gamma(1-\gamma)(\delta_O - \delta_P)(1-q)K}{\delta_O \delta_P (1+2\varepsilon-\gamma)^2} < 0 \quad (10)$$

A última consideração diz respeito ao tamanho (γ) do primeiro grupo de credores, aqueles com postura ignorada pelo mercado. Este parâmetro pode ser visto como a medida de incerteza do sistema. Assim, o autor investigou como γ afeta a severidade de contágio quando as informações se tornam muito precisas, ou seja, quando $\varepsilon \rightarrow 0$. A conclusão é de que, neste caso, a severidade de contágio aumenta com γ , como se pode verificar na equação a seguir:

$$\frac{\partial SC}{\partial \gamma} = \frac{(\delta_O - \delta_P)(1-q)K}{\delta_O \delta_P} > 0 \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (11)$$

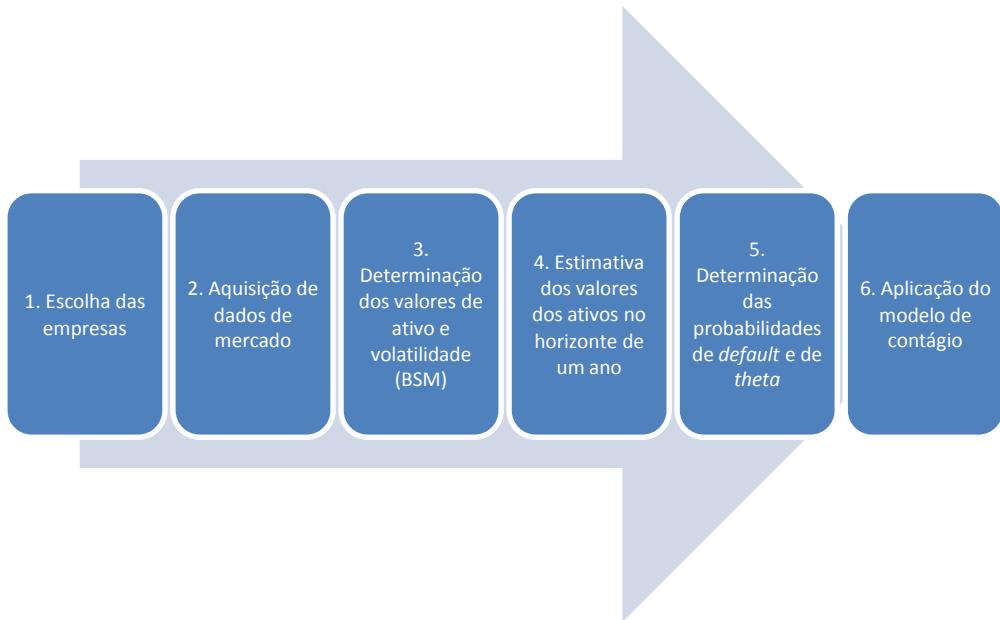
3.3 Modificação do modelo estudado

Como discutido, o modelo de Oh compara a capacidade das empresas em cumprir com suas obrigações de curto prazo (θ_i) com valores de equilíbrio calculados a partir da teoria de jogos globais, para então analisar as influências de diferentes parâmetros na probabilidade de contágio entre empresas. No entanto, utiliza para tal tarefa um valor aleatório, uniformemente distribuído. No próximo Capítulo, propõe-se um novo método para que se calcule tal valor, de modo a relacionar a ele indicadores reais das empresas estudadas. Desta maneira, será então possível realizar análises quantitativas acerca das modificações dos dados empresariais das empresas estudadas, além daqueles discutidos na seção anterior, o que não era possível com a metodologia inicial.

4 UMA PROPOSTA DE MODELO - METODOLOGIA

Neste capítulo será descrito o modelo metodológico proposto para se determinar os valores de *theta* de ambas as empresas. A metodologia consiste em seis etapas. Primeiramente, são escolhidas duas empresas não financeiras, atuantes em setores distintos da economia. Em seguida, são obtidos dados das empresas, aqui denominadas empresa A e empresa B. Um modelo, desenvolvido por Black e Scholes (1973) e, posteriormente, por Merton (1974) é então aplicado, com o objetivo de determinar os valores do ativo e sua volatilidade para cada empresa. Com os valores correntes de ativos e volatilidades dos mesmos, são estimados os valores dos ativos num ponto no futuro relevante ao estudo, escolhido como sendo um ano a partir da data corrente. A partir destes valores, pode-se estimar a probabilidade de *default* (aqui definido como o caso em que a empresa é incapaz de quitar suas dívidas junto aos credores ao final de um ano) de cada uma das empresas e se definir um *theta* para cada empresa. Por fim, os valores de *theta* tornam-se dados de entrada para o modelo de contágio discutido na seção anterior, podendo assim o modelo ser aplicado. A metodologia proposta pode ser mais bem visualizada na Figura 6.

Figura 6 – Sequência lógica da metodologia do modelo



Fonte: Elaborado pelo autor

A seguir cada passo será mais bem detalhado, a fim de garantir a linearidade do modelo e a melhor compreensão do mesmo.

4.1 Escolha das empresas e dados de mercado

Os passos 1 e 2 da metodologia adotada consistem na escolha de duas empresas e na aquisição de dados de mercado das mesmas, relevantes ao problema. Foram escolhidas, propositalmente, empresas de setores distintos da economia. Empresas com situações econômicas muito favoráveis não foram escolhidas, por apresentarem probabilidades de *default* muito baixas no curto prazo. No caso destas empresas, uma situação em que a rolagem de dívida é uma questão sensível e o risco de crise de liquidez se torna palpável é muito improvável, não sendo, portanto, adequadas ao presente estudo.

A primeira empresa selecionada atua no setor agropecuário, com receitas líquidas de R\$ 1.140 milhões e passivo de R\$ 685 milhões. A segunda empresa pertence ao setor de energia e no último ano alcançou receitas de R\$ 2.500 milhões com passivo de R\$ 4.075 milhões. Os dados buscados foram:

- valor do passivo circulante;
- valor do passivo não circulante;
- valor do patrimônio líquido;
- volatilidade anual das ações;

Um resumo com as informações relevantes ao estudo pode ser encontrado na Tabela 1. Os dados empresariais foram obtidos da base de dados BvD Orbis (2014).

Tabela 1 – Resumo das informações de mercado das empresas estudadas

Empresa	A	B
Setor	Agropecuária	Energia
Patrimônio Líquido (V_E)	R\$ 93,7 mi	R\$ 2169,7 mi
Valor de face do passivo (X)	R\$ 685,6 mi	R\$ 2538,5 mi
Volatilidade anual da ação (σ_E)	124,15%	101,51%

Fonte: EMIS-ISI (2014), elaborado pelo autor

É importante ressaltar que o valor do passivo com vencimento em 1 ano foi calculado a partir da seguinte fórmula simplificadora:

$$\text{Valor do passivo} = \text{Passivo Circulante} + \frac{\text{Passivo Não Circulante}}{2}. \quad (12)$$

Observa-se que ambas as volatilidades anuais encontram-se muito acima do nível de volatilidade da Bolsa de Valores (IBOVESPA) como um todo, que atingiu 21,35% no ano pesquisado (BM&FBOVESPA, 2014).

4.2 Determinação dos valores de ativo e volatilidade

O 3º passo da metodologia é de fundamental importância e se baseia nos desenvolvimentos de Black, Scholes e Merton (BSM). Para se chegar a um modelo que avalie o valor corrente dos ativos das empresas estudadas precisa-se, primeiramente, examinar com mais cuidado o que os autores propuseram e como este modelo se acomoda às necessidades deste trabalho. Em seguida, será apresentado o método desenvolvido pelo autor deste trabalho para se resolver o citado modelo com o auxílio do *software* Matlab.

4.2.1 Black-Scholes-Merton

Em seu famoso artigo de 1973, Fischer Black e Myron Scholes desenvolveram um meio para avaliar o preço de opções no mercado financeiro. Opções podem ser definidas como um "título que dá o direito de compra ou venda de um ativo, sujeito a certas condições, num certo período de tempo" (BLACK e SCHOLES, 1973). Este ativo subjacente pode ser uma ação, um índice, um contrato futuro, uma letra do tesouro, uma commodity, etc. O artigo trata apenas de "opções europeias", aquelas que apenas podem ser exercidas em uma data específica, em oposição a "opções americanas", que podem ser exercidas em qualquer período. Opções podem ser vistas como apólices de seguro. Um emissor vende uma opção de compra, denominadas *calls*, (ou venda, denominadas *puts*) por um dado preço no mercado (valor da opção). O comprador desta opção, então, passa a possuir o *direito* de exercer a compra (ou venda) do ativo a ela atrelado na data de expiração. No caso em que este direito é exercido, o emissor da opção é obrigado a vender, no caso de *call*, ou comprar, no caso de *put*, o ativo subjacente. O valor pago pelo ativo na data de expiração é chamado de preço de exercício, ou *strike*.

A fórmula desenvolvida possui a vantagem de utilizar apenas variáveis observáveis no mercado. Não necessita, por exemplo, de suposições acerca do otimismo dos investidores em relação ao ativo original (MERTON, 1976). Em sua formulação original, o valor da opção (w) depende apenas da taxa de juros livre de risco (r), do valor do ativo (x) e de sua volatilidade (v):

$$w_2 = rw - rxw_1 - \frac{1}{2}v^2x^2w_{11}, \quad (13)$$

onde w_1 é a derivada parcial de w em relação ao preço do ativo x , w_{11} sua derivada de segunda ordem e w_2 sua derivada em relação ao tempo.

Uma notação mais usual encontrada hoje em dia se lê:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \quad (14)$$

onde V é o valor da opção, S é o valor do ativo subjacente, σ sua volatilidade e r a taxa de juros livre de risco.

Este desenvolvimento foi estendido no ano seguinte por Merton (1974), no que o autor chamou de "teoria da estrutura de risco das taxas de juros", que passa a incluir, de forma análoga às opções, a precificação de títulos corporativos em geral, incluindo ações empresariais. Este risco foi definido pelo mesmo como aquele decorrente da mudança inesperada da probabilidade de inadimplência das empresas em foco, excluindo-se aquele risco tipicamente associado à variação da taxa de juros em si.

Dessa forma, na análise de Merton, o valor da soma dos ativos de uma empresa e sua volatilidade são análogos, respectivamente, ao valor do ativo (aqui, no sentido mais amplo da palavra) considerado por Black e Scholes e sua volatilidade, assim como o preço do título (ou ação), para Merton, é análogo ao valor de mercado da opção de Black e Scholes. Por fim, o preço de exercício no modelo de Black e Scholes é análogo ao valor do passivo da empresa para Merton. Esta última comparação não é tão direta e requer um olhar mais aprofundado.

Em sua análise, Merton trabalha apenas com um tipo, uniforme, de débito para com terceiros. O caráter de responsabilidade limitada da *equity* determina que seus detentores tenham o direito, mas não o dever, de pagar o valor total da dívida aos credores e obter o valor total da empresa. Isso significa, essencialmente, que os credores da empresa a possuem até que as dívidas sejam pagas pelos detentores da *equity*. Assim, neste caso simples, o valor da *equity* é o mesmo que uma opção de compra dos ativos da empresa com um preço de exercício igual ao valor do passivo da empresa.

Para se aplicar a equação de Merton, no entanto, é preciso realizar um procedimento iterativo para a solução de um sistema de equações não lineares, com o objetivo de determinar o valor de mercado dos ativos da empresa e sua volatilidade, com base nos valores de seu patrimônio líquido (*equity*, ou valor total das ações) e respectiva volatilidade (obtida de dados históricos).

Há duas equações que necessitam ser simultaneamente satisfeitas. A primeira relaciona o valor da *equity* com o valor implícito dos ativos e do valor de face da dívida na data de vencimento:

$$V_E = V_A N(d_1) - e^{-rT} X N(d_2), \quad (15)$$

onde

V_E é o valor da *equity*,

V_A é o valor dos ativos,

$$d_1 = \frac{\ln \frac{V_A}{X_t} + \left(r + \frac{\sigma_A^2}{2} \right) T}{\sigma_A \sqrt{T}}, \quad (16)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_A \sqrt{T}, \quad (17)$$

$N(\cdot)$ é a função cumulativa da distribuição normal,

X é o valor da dívida como calculado em (12),

T é o horizonte de tempo considerado e

r é a taxa de juros livre de risco.

Observa-se que o valor da *equity* será tanto maior quanto maior for o valor dos ativos e menor for o valor da dívida descontada da taxa de juros livre de risco (decorrente da possibilidade de aplicação do valor da dívida no presente para pagamento da dívida no futuro).

$N(d_1)$ aqui é a probabilidade de que o valor dos ativos, na data de exercício, esteja acima do valor de *strike*. Por outro lado, $N(d_2)$ representa a probabilidade de que o valor dos ativos esteja abaixo deste valor. Neste caso, a empresa é incapaz de cobrir suas dívidas e vai à falência (*default*).

A segunda equação relaciona as volatilidades do ativo e da *equity* e pode ser escrita como:

$$\sigma_E = \frac{V_A}{V_E} \Delta \sigma_A, \quad (18)$$

onde

$$\Delta \sigma_A = N(d_1) \cdot \sigma_A. \quad (19)$$

Aqui nota-se a relação intrínseca entre o valor da *equity* da empresa e o valor de seus ativos.

4.2.2 Solução do sistema de equações

A seguir, será descrito o método, desenvolvido pelo autor e implementado em Matlab, necessário para resolver o sistema de equações não lineares supracitado. O objetivo final é a determinação do valor dos ativos e sua volatilidade para uma dada empresa, com a utilização dos dados apresentados na Seção 4.1.

O problema da solução do sistema de equações proposto possui certa complexidade, por depender, tipicamente, de uma sequência de iterações, já que, por apresentar natureza não linear, não permite uma solução analítica direta.

O autor, portanto, optou por desenvolver um código no *software* Matlab (ver Apêndice A) que o fizesse. A metodologia adotada no caso foi a seguinte:

1. Uma estimativa inicial qualquer é escolhida para o valor do ativo e sua volatilidade.

2. Os valores aproximados de *equity* (V'_E) e respectiva volatilidade (σ'_E) são calculados utilizando as equações de (15) a (19).

3. É calculado o erro quadrático da primeira estimativa, de acordo com a seguinte fórmula:

$$E^2 = \left\{ \left[\frac{(V_E - V'_E)}{V_E} \right]^2 + \left[\frac{(\sigma_E - \sigma'_E)}{\sigma_E} \right]^2 \right\} * 10.000.000. \quad (20)$$

4. V_A é acrescido em $p\%$, p sendo um passo definido como:

$$p = rnd(norm(0,1; 0,2)), \quad (21)$$

onde $norm$ é uma distribuição normal com média 0,1 e desvio padrão 0,2 e p um número aleatório normalmente distribuído.

5. Os passos 2-3 são repetidos.

6a. Caso o erro quadrático houver sido reduzido, os novos valores de V_A e σ_A são mantidos.

6b. Caso contrário, os valores são descartados e o passo 4 é repetido, porém decrescendo em $p\%$.

7. Os passos 2-3 são repetidos.

8a. Caso o erro quadrático houver sido reduzido, os novos valores de V_A e σ_A são mantidos.

8b. Caso contrário, os valores são descartados e o passo 4 é repetido, porém acrescendo σ_A em $p\%$.

9. Os passos 5-7 são repetidos.

10a. Caso o erro quadrático houver sido reduzido, os novos valores de V_A e σ_A são mantidos.

10b. Caso contrário, repetir todos os passos enquanto $E^2 > 0,5$.

11. A cada 3.000 iterações, o valor de V_A é acrescido em 10%.

12. A partir da 100.000^a iteração, é permitido um erro quadrático duas vezes maior. O erro permitido aumenta desta forma a cada 100.000 iterações até que haja convergência.

O método adotado, em especial a definição de p no passo 4, resultou da dificuldade encontrada para se criar uma inteligência que evitasse que as iterações estacionassem em um ponto de mínimo local, fazendo com que o erro quadrático não fosse alterado com o passo adotado. Ao se adotar um passo aleatório normalmente distribuído, garante-se uma dinamicidade na procura por valores de V_A e σ_A que diminuam o erro quadrático e evita-se, em parte, o problema dos mínimos locais. Os passos 11 e 12 levam esta ideia além e impedem que as iterações não estacionem por um tempo indefinido. O passo 11 causa uma perturbação

maior no sistema (10% no valor estimado de V_A) a cada 3.000 iterações, valor alto que já indica que um ponto de mínimo foi atingido que não pode ser vencido pelo passo aleatório, o que ao mesmo tempo aumenta levemente o erro quadrático e procura retirar o sistema do ponto de estagnação. O passo 12 existe para garantir que casos extremos, em que a convergência do erro quadrático a zero seja dificultada por muitos mínimos locais, não sejam recalculados indefinidamente, através do aumento do erro quadrático estipulado. Assumindo que isto ocorra, garante-se ainda um erro quadrático inferior a 0,00004% após 100.000 iterações. A experiência na aplicação deste método indica que casos como este ocorrem em menos de 10% das aplicações. Em casos normais, o passo 10b garante um erro quadrático inferior a 0,00002%.

Ao final da aplicação do método, obtemos valores para V'_A e σ'_A que zeram (ou próximo a isso) o erro quadrático.

4.3 Valores de ativo no horizonte de um ano

O quarto passo da metodologia consiste na determinação dos valores dos ativos das empresas no horizonte de um ano. Este passo é necessário, pois se almeja determinar a probabilidade de *default* neste mesmo período.

De posse dos valores presentes de V_A e σ_A , resta, portanto, extrapolará-los para o período relevante de um ano. Isto é realizado através da simples fórmula:

$$V_A^T = V_A * \exp(\sigma_A * T * \epsilon(0; 1)), \quad (22)$$

onde:

V_A^T é a estimativa do valor dos ativos no ponto T,

V_A é o valor dos ativos calculado em 4.2.2,

σ_A é o valor da volatilidade dos ativos calculada em 4.2.2,

T é o período de tempo estudado, um ano e

$\epsilon(0; 1)$ é um erro aleatório normalmente distribuído com média 0 e desvio padrão 1.

4.4 Probabilidades de *default* e *theta*

O quinto passo consiste na determinação das probabilidades de *default* das empresas e de seus parâmetros de desempenho, *theta*.

O risco de inadimplência, ou risco de *default*, no nível empresarial, pode ser definido como a probabilidade do tomador de empréstimo falhar em cumprir com suas obrigações ou dívidas (CROSBIE e BOHN, 2003). Antes de uma possível inadimplência, não é possível diferenciar empresas que irão ou não se tornar inadimplentes. Pode-se, no entanto, estimar a probabilidade de que isto ocorra.

Como salientado na seção anterior, a equação de Black-Scholes-Merton pode ser utilizada no contexto de débitos corporativos. Com base nela, é possível escrever a probabilidade de *default* como:

$$p_T = N \left[-\frac{\ln \frac{V_A^T}{X_t} + \left(r - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) T}{\sigma_A \sqrt{T}} \right], \quad (23)$$

onde:

N é a função cumulativa da distribuição normal de probabilidade;

V_A é o valor de mercado dos ativos da empresa;

X_t é o valor de face da dívida;

r é o retorno esperado do ativo;

σ_A é a volatilidade dos ativos da empresa e;

T é a distância temporal até o vencimento da dívida.

Após os passos anteriores possuímos todos os elementos necessários para o cálculo desta probabilidade.

Resta, por conseguinte, a determinação do parâmetro mais relevante para o presente trabalho, a medida de saúde financeira das empresas, aqui denotado por *theta*. Este parâmetro foi escolhido, construído e calculado de modo a representar um indicador relevante aos credores, para posterior emprego no modelo de contágio. Assim, ele deveria possuir significado real e palpável no que tange o que interessa aos credores, ou seja, a probabilidade de inadimplência das empresas estudadas. Como discutido no Capítulo 3, o modelo de empréstimo considerado neste trabalho admite apenas duas alternativas após a rolagem da dívida: pagamento da dívida por parte das empresas ou falência e inadimplência, caso em que os credores recebem virtualmente nenhuma compensação.

A escolha óbvia é, portanto, a probabilidade de que a empresa não vá à falência, em outras palavras, que quite suas dívidas. Esta probabilidade pode ser deduzida diretamente da probabilidade de *default* calculada:

$$\theta = (1 - p_T). \quad (24)$$

Tem-se, portanto, o indicador que possibilita que se retorne ao modelo de contágio e se volte à sua aplicação.

4.5 Aplicação do modelo de contágio

O sexto e último passo da metodologia adotada consiste na aplicação do modelo de contágio desenvolvido por Oh (2013). A principal alteração no modelo é, como já foi amplamente discutido, a modificação da variável *theta*, definida por Oh como um número aleatório uniformemente distribuído entre 0 e 1, para uma medida da probabilidade de solvência da empresa no horizonte de um ano. Assim, o novo *theta* captura a probabilidade de que, no caso de rolagem da dívida por parte dos credores, a empresa beneficiada consiga cumprir com essas obrigações ao término deste período.

Como foi visto na Seção 4.3, cada vez que calculamos o valor dos ativos no horizonte de um ano, V_A^T , geramos um valor influenciado por uma variação no valor de ϵ , que é normalmente distribuído ao redor de 0 com desvio padrão 1. Assim, podem ser gerados diversos valores de V_A^T , e, consequentemente, diversos valores de *theta* para cada uma das duas empresas, valores que podem servir então para se alimentar o modelo de contágio a fim de se realizar as simulações.

Nesse sentido, cada simulação consistiu em 50.000 repetições do modelo de Oh com os mesmos parâmetros de entrada (V_A^T e σ_A), de modo que, ao final, pudessem ser extraídos os valores médios de cada variável de interesse.

5 RESULTADOS

Neste capítulo serão apresentados diversos resultados de simulações executadas para o par de empresas estudado. Em um primeiro momento, a simulação-base será apresentada, isto é, uma simulação do modelo de contágio realizada com os dados reais das empresas e parâmetros do modelo de contágio pré-determinados. Posteriormente, proceder-se-á à uma série de análise de sensibilidades, cujo objetivo será testar o comportamento do modelo de acordo com a alteração de parâmetros-chave.

5.1 Simulação-Base

O propósito da simulação-base é estabelecer uma base de estudos, um *benchmark* das análises de sensibilidade a serem realizadas a seguir.

Ela foi realizada com os valores reais consultados das empresas estudadas (ver Tabela 1) e os parâmetros do modelo de contágio visíveis na Tabela 2.

Tabela 2 – Parâmetros da simulação-base

Parâmetro	Descrição	Valor
r	Taxa de juros livre de risco (Selic)	10,9%
T	Horizonte de tempo	1 ano
δ_o	Taxa de desconto do credor otimista	25%
δ_p	Taxa de desconto do credor pessimista	11%
q	Probabilidade do grupo 1 de credores ser pessimista	40%
γ	Proporção de credores pertencentes ao grupo 1	80%
L	Valor de face da dívida	1
K	Valor do colateral da dívida	0,1
ε	Ruído no sinal divulgado aos credores	10%
i	Número de iterações do modelo de contágio	50.000

Fonte: Elaborado pelo autor

De posse dos parâmetros expostos, foi realizada uma primeira simulação do modelo de contágio os utilizando, com a obtenção dos resultados médios ($\frac{\sum_{i=1}^{50.000} x_i}{i}$) expressos na Figura 7.

Figura 7 – Resultados da simulação-base

Severidade de contágio ($\theta_{BP}^* - \theta_{AP}^*$) média	Probabilidade média de contágio
0,122	4,18%

Fonte: Elaborado pelo autor

5.2 Análises de sensibilidade

A partir dos resultados obtidos para a simulação-base, realizaram-se diferentes análises de sensibilidade, ou seja, foram variados diferentes parâmetros do modelo e repetidas as simulações para cada uma destas variações. Essas análises serão divididas em duas partes: análises de sensibilidade de parâmetros ou valores do modelo de definição de *theta* e análises de sensibilidade quanto aos parâmetros do modelo de contágio em si. Em ambos os casos, serão analisados os impactos destas variações nos resultados do modelo de contágio. Para as análises do modelo de definição de *theta*, também serão analisadas as variações nos resultados para valores de *theta* de cada empresa. Em todos os casos, os valores apresentados são médias das 50.000 iterações do modelo simulado.

5.2.1 *Análises quanto ao modelo de definição de theta*

A primeira análise de sensibilidade escolhida para o modelo de definição dos valores de *theta* foi a da volatilidade da *equity* da empresa A. Esta é uma escolha fácil, já que a volatilidade costuma variar muito ano a ano, dependendo de fatores muitas vezes externos à empresa e de difícil previsão. Faz sentido, portanto, verificar como as diferentes volatilidades acionárias afetam o valor dos ativos calculados para a empresa A através do modelo BSM e a probabilidade de contágio simulada com o modelo desenvolvido.

Os resultados da análise de sensibilidade encontram-se na Tabela 3.

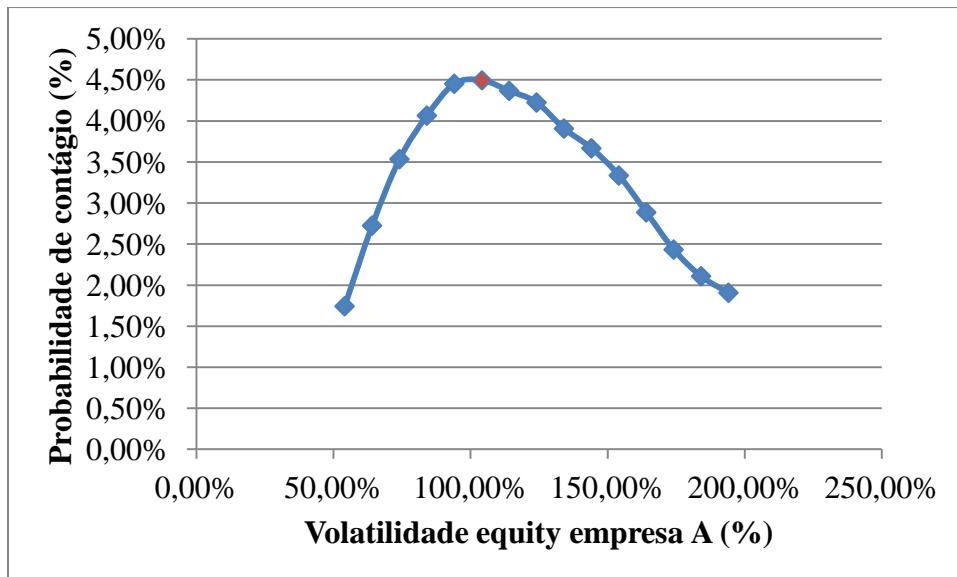
Tabela 3 – Resultados da análise de sensibilidade (volatilidade de *equity* da empresa A)

Volatilidade <i>equity</i> empresa A	Valor dos ativos empresa A	Volatilidade dos ativos empresa A	Probabilidade de contágio	Valor médio de <i>theta</i> para empresa A
54,15%	R\$ 708.021.607,64	7,35%	1,74%	90,73%
64,15%	R\$ 706.985.073,06	9,00%	2,72%	85,63%
74,15%	R\$ 704.926.534,63	10,90%	3,53%	80,19%
84,15%	R\$ 701.433.688,39	13,10%	4,06%	74,74%
94,15%	R\$ 695.973.042,99	15,69%	4,45%	69,45%
104,15%	R\$ 687.979.822,27	18,76%	4,49%	63,99%
114,15%	R\$ 676.776.359,92	22,39%	4,37%	58,90%
124,15%	R\$ 661.447.460,29	26,73%	4,22%	53,93%
134,15%	R\$ 642.227.923,75	31,73%	3,91%	49,35%
144,15%	R\$ 617.972.231,00	37,66%	3,67%	45,00%
154,15%	R\$ 589.420.270,88	44,45%	3,33%	41,08%
164,15%	R\$ 556.630.795,07	52,18%	2,89%	37,66%
174,15%	R\$ 518.891.056,03	61,31%	2,43%	33,96%
184,15%	R\$ 480.421.885,39	71,19%	2,11%	30,95%
194,15%	R\$ 438.837.907,85	82,55%	1,91%	28,12%

Fonte: Elaborado pelo autor

A partir do valor real de volatilidade das ações (*equity*) da empresa A (destacado em cinza), foi realizada uma análise de sensibilidade com incrementos e decrementos graduais de 10%. Percebe-se que, apesar da natureza inversamente proporcional existente entre volatilidade de *equity* e valor de ativos, há um valor de volatilidade (104,15%) para o qual a probabilidade de contágio atinge um valor máximo (4,49%). Essa condição pode ser mais bem observada na Figura 8. Percebeu-se também que a severidade de contágio não é alterada com a modificação dos valores de volatilidade de *equity*.

Figura 8 – Gráfico de resultados da análise de sensibilidade (volatilidade de *equity* empresa A)



Fonte: Elaborado pelo autor

Não há, portanto, relação linear entre a volatilidade da empresa e a probabilidade de contágio observada.

Uma segunda análise foi realizada, desta vez modificando os valores de volatilidade de *equity* da empresa B, ou seja, aquela que tem processo de rolagem de dívida posterior à empresa A. Os resultados foram compilados na Tabela 4.

Tabela 4 – Resultados da análise de sensibilidade (volatilidade de *equity* da empresa B)

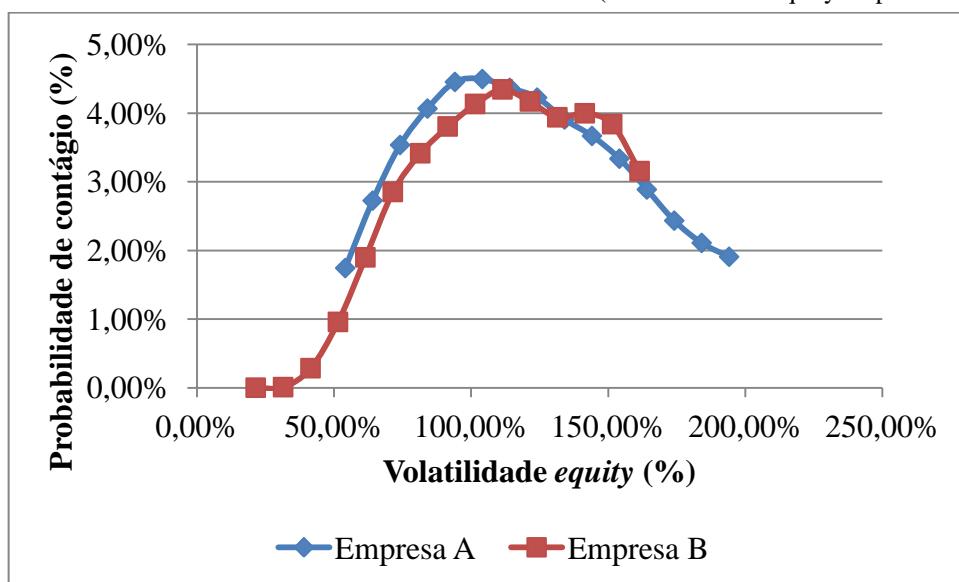
Volatilidade <i>equity</i> empresa B	Valor dos ativos empresa B	Volatilidade dos ativos empresa B	Probabilidade de contágio	Valor médio de <i>theta</i> para empresa B
21,51%	R\$ 4.446.418.510,41	10,50%	0,00%	100,00%
31,51%	R\$ 4.446.589.084,71	15,39%	0,01%	99,88%
41,51%	R\$ 4.446.181.515,32	20,26%	0,28%	98,82%
51,51%	R\$ 4.444.829.293,28	25,22%	0,96%	96,30%
61,51%	R\$ 4.441.337.565,80	30,32%	1,90%	92,64%
71,51%	R\$ 4.432.243.545,31	35,72%	2,85%	88,33%
81,51%	R\$ 4.415.474.197,31	41,55%	3,41%	83,53%
91,51%	R\$ 4.389.087.404,26	47,84%	3,80%	78,83%

101,51%	R\$ 4.348.096.474,06	54,56%	4,13%	74,04%
111,51%	R\$ 4.297.192.339,73	61,89%	4,34%	69,50%
121,51%	R\$ 4.230.512.765,81	69,88%	4,17%	64,77%
131,51%	R\$ 4.153.439.313,61	78,38%	3,94%	60,40%
141,51%	R\$ 4.060.620.775,16	87,43%	4,00%	56,07%
151,51%	R\$ 3.961.664.428,35	97,14%	3,84%	52,27%
161,51%	R\$ 3.852.554.259,52	107,25%	3,15%	48,59%

Fonte: Elaborado pelo autor

Verifica-se, novamente, um ponto de máximo para a probabilidade de contágio (4,34% para uma volatilidade de 111,51%). Pode-se notar, ainda, que a probabilidade de contágio tende a zero para volatilidades suficientemente pequenas. O comportamento citado pode ser observado na Figura 9, em conjunto com o resultado anterior, para efeitos de comparação.

Figura 9 – Gráfico de resultados da análise de sensibilidade (volatilidade de equity empresas A e B)

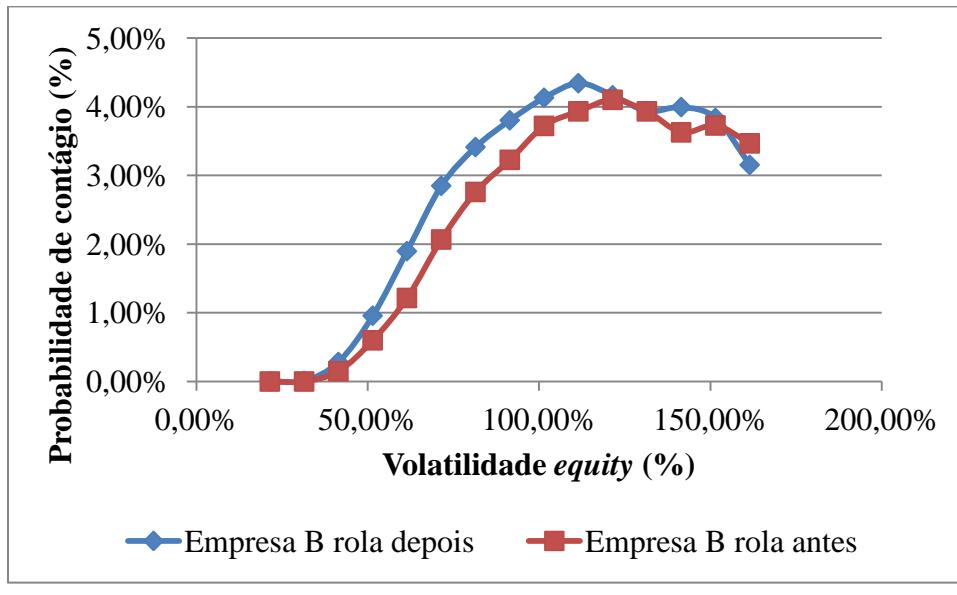


Fonte: Elaborado pelo autor

Por fim, foi realizada a mesma análise de sensibilidade do caso anterior, porém a ordem dos processos de rolagem de dívida foi invertida. Assim, a volatilidade da *equity* da empresa B foi novamente alterada incrementalmente, mas seu processo de rolagem ocorreu antes daquele da empresa A.

A Figura 10 expõe os resultados obtidos, comparando-os com o caso em que a empresa B é a segunda a passar pelo processo de rolagem de dívida.

Figura 10 – Gráfico de resultados da análise de sensibilidade (volatilidade de *equity* empresa B com inversão da ordem de rolagem)



Fonte: Elaborado pelo autor

Percebe-se aqui um descolamento da tendência de probabilidade de contágio, em que o fato da empresa B rolar sua dívida após a empresa A reduz esta probabilidade para cada valor de volatilidade considerado.

Ressalta-se aqui que todos os resultados serão devidamente analisados na Seção 6.1.

5.2.2 *Análises quanto ao modelo de contágio*

Voltam-se agora as atenções para as análises de sensibilidade dos parâmetros do modelo de contágio propriamente dito. O objetivo destas análises é corroborar com ou refutar as considerações analíticas realizadas por Oh através da realização de simulações em que se alteram gradativamente os parâmetros do modelo. Além disso, a análise é estendida e passa agora a ter a capacidade também de quantificar as alterações impostas por alterações nos parâmetros observados.

Primeiramente, buscou-se simular a sensibilidade dos parâmetros estudados por Oh e descritos na Seção 3.2. Assim, o primeiro parâmetro estudado foi o valor do colateral, K . A seguir, na Tabela 5, podem ser encontrados os valores que resultaram da simulação com valores decrescentes de K (até $K = 0,01$), com passos de 0,01, a partir do valor da simulação-base ($K = 0,10$). O colateral é aquele valor recebido pelo credor em caso de decisão por não rolagem da dívida de uma das empresas, lembrando que o valor de face da dívida é igual a 1.

Tabela 5 – Resultados da análise de sensibilidade (K)

K	Severidade de contágio ($\theta_{BP}^* - \theta_{AP}^*$) média	Probabilidade média de contágio
0,10	0,122	4,18%
0,09	0,110	2,64%
0,08	0,098	1,69%
0,07	0,086	1,05%
0,06	0,073	0,64%
0,05	0,061	0,37%
0,04	0,049	0,20%
0,03	0,037	0,09%
0,02	0,024	0,04%
0,01	0,012	0,00%

Fonte: Elaborado pelo autor

Fica claro pela tabela que a probabilidade de contágio e sua severidade são reduzidas com a redução gradual de K . Não foram testados valores maiores para K , pois o modelo exige $K < \delta_P < \delta_O$.

A seguir, foram realizadas simulações com alteração gradual do valor do custo de oportunidade dos credores pessimistas. Tal valor poderia ser modificado através de garantias dadas pelo governo ou por sinalizações positivas por parte das empresas e do mercado. Assim, a partir do valor padrão de 11% (pouco acima da taxa básica de juros de 10,9%), o valor de δ_P foi gradativamente aumentado com passos de 1%, fazendo com que a diferença ($\delta_O - \delta_P$) também diminuisse. Os resultados encontram-se na Tabela 6.

Tabela 6 – Resultados da análise de sensibilidade (δ_P)

δ_P	$\delta_O - \delta_P$	Severidade de contágio $(\theta_{BP}^* - \theta_{AP}^*)$ média	Probabilidade média de contágio
11,00%	14,00%	0,122	4,07%
12,00%	13,00%	0,104	2,53%
13,00%	12,00%	0,089	1,64%
14,00%	11,00%	0,075	1,01%
15,00%	10,00%	0,064	0,68%
16,00%	9,00%	0,054	0,48%
17,00%	8,00%	0,045	0,29%
18,00%	7,00%	0,037	0,18%
19,00%	6,00%	0,030	0,13%
20,00%	5,00%	0,024	0,07%
21,00%	4,00%	0,018	0,04%
22,00%	3,00%	0,013	0,02%
23,00%	2,00%	0,008	0,01%
24,00%	1,00%	0,004	0,00%
25,00%	0,00%	0,000	0,00%

Fonte: Elaborado pelo autor

Percebe-se que tanto a severidade de contágio quanto sua probabilidade de ocorrência decrescem com a diferença entre as taxas de desconto utilizadas pelos credores.

A simulação seguinte consistiu em alterar o valor de ε , que representa, no modelo, o ruído no sinal recebido pelos credores acerca do indicador θ das empresas devedoras. Ele pode ser visto como um indicador da qualidade das informações recebidas ou ainda como uma medida de incerteza acerca destas informações. O valores testados variaram de 0,14, passando pelo valor padrão de 0,10, até 0, com passo de 0,01. Os resultados podem ser verificados na Tabela 7.

Tabela 7 – Resultados da análise de sensibilidade (ε)

ε	Severidade de contágio $(\theta_{BP}^* - \theta_{AP}^*)$ média	Probabilidade média de contágio
0,15	0,098	4,98%
0,14	0,102	4,98%
0,13	0,106	4,66%
0,12	0,111	4,65%
0,11	0,116	4,24%
0,1	0,122	4,16%
0,09	0,129	3,98%
0,08	0,136	3,71%
0,07	0,144	3,42%
0,06	0,153	3,05%
0,05	0,163	2,66%
0,04	0,175	2,35%
0,03	0,188	1,99%
0,02	0,204	1,32%
0,01	0,222	0,82%
0,00	0,244	0,00%

Fonte: Elaborado pelo autor

Observa-se pela tabela que, apesar do fato de que a severidade de contágio cresce com o decréscimo de ε , o comportamento da probabilidade de contágio é estritamente decrescente com ε . Isto pode não parecer intuitivo e será mais bem analisado na Seção 6.2.

Finalmente, foi analisado o comportamento de λ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. O parâmetro λ , como visto anteriormente, representa a proporção de credores do grupo 1, aqueles cuja postura (otimista ou pessimista) não é conhecida pelo mercado (leia-se: credores do grupo 2). Portanto, representa o nível ou a quantidade de informação incompleta do mercado. Simulações foram realizadas a partir do valor padrão de 0,8, com passos decrescentes de 0,05. Os resultados dessas simulações podem ser encontrados na Tabela 8.

Tabela 8 – Resultados da análise de sensibilidade (λ)

λ	Severidade de contágio $(\theta_{BP}^* - \theta_{AP}^*)$ média
0,80	0,244
0,75	0,229
0,70	0,214
0,65	0,199
0,60	0,183
0,55	0,168
0,50	0,153
0,45	0,137
0,40	0,122
0,35	0,107
0,30	0,092
0,25	0,076
0,20	0,061
0,15	0,046
0,10	0,031
0,05	0,015

Fonte: Elaborado pelo autor

Como o valor de ε foi levado a 0, não cabe aqui observar o valor da probabilidade de contágio, já que isto leva o valor de Σ_2 a 0, o que faz com que os θ de equilíbrio sejam os mesmos tanto para o caso em que o grupo 1 é pessimista, quanto para o caso em que ele é otimista. Neste caso, o intervalo $[\theta_{AO}^*, \theta_{AP}^*]$ tende a 0, assim como a probabilidade de contágio. No entanto, ainda é válido observar como a variação de λ afeta a severidade de contágio.

No próximo capítulo, os resultados obtidos serão analisados e considerações acerca dos mesmos serão realizadas.

6 DISCUSSÃO

A partir dos resultados exibidos no Capítulo 5, serão realizadas considerações em relação às variações verificadas nos *outputs* chave do modelo, a probabilidade de contágio e sua severidade principalmente. A estrutura escolhida para tanto espelha a do citado capítulo. Assim, primeiramente analisamos os resultados das análises de sensibilidade do modelo BSM para, em seguida, analisarmos separadamente os resultados de sensibilidade do modelo de contágio aplicado.

6.1 Análise quanto ao modelo de definição de *theta*

A primeira análise realizada teve como resultado um comportamento não linear da probabilidade de contágio em relação ao aumento da volatilidade de *equity* da empresa A. Assim, a probabilidade de contágio apresentou um ponto de máximo para uma volatilidade de 104,15%.

Esse comportamento leva à análise do modelo de contágio em si. Quanto maior o valor da volatilidade, maior a probabilidade de *default* da empresa no curto prazo, como denotado por valores decrescentes de *theta* na Tabela 3. Para valores suficientemente grandes de *theta*, a probabilidade de *default* da empresa A é muito reduzida. Conforme esses valores decrescem, no entanto, *theta* passa a ter uma probabilidade maior de cair no intervalo $[\theta_{AO}^*, \theta_{AP}^*]$, que, como vimos, é condição para que haja contágio. Conforme o valor de volatilidade é aumentado ainda mais, no entanto, *theta* passa a ter uma maior probabilidade de se encontrar abaixo do valor de θ_{AO}^* , condição que faz com que o projeto da empresa A seja mal sucedido independentemente da postura dos credores do grupo 1, o que, como vimos, impede que haja contágio. A conclusão aqui é, portanto, que, apesar da probabilidade de *default* da empresa ser estritamente crescente com o aumento de sua volatilidade de *equity*, a probabilidade de contágio é maior em uma determinada faixa de *theta*. Do ponto de vista da empresa B, então, a preocupação maior deve ocorrer quando empresas que compartilham seu mesmo grupo de credores encontram-se em uma situação limítrofe, em que a probabilidade de *default* assume valores intermediários, acarretando em uma maior probabilidade de contágio de uma eventual crise de liquidez.

Os resultados obtidos na Figura 9 corroboram os resultados anteriores e indicam que o valor de volatilidade para o qual a probabilidade de contágio é máxima varia dependendo das empresas analisadas.

Por fim, analisamos os resultados expostos na Figura 10, referentes à troca na ordem das empresas no que diz respeito à rolagem de dívidas. Percebe-se que os resultados são muito semelhantes em sua dinâmica. No entanto, para cada dado valor de volatilidade, o caso em que a empresa B tem um processo de rolagem anterior à empresa A apresenta uma probabilidade de contágio maior. A única diferença entre os dois casos, em termos de parâmetros do modelo, é o *theta* de cada empresa, que é maior para a empresa B. Verifica-se, deste modo, que, neste caso, a probabilidade de contágio é maior, *ceteris paribus*, quando a empresa com a maior probabilidade de *default* (empresa A, no caso) é avaliada em segundo lugar pelos credores. Isso ocorre porque o intervalo $[\theta_{AO}^*, \theta_{AP}^*]$ é sempre menor que $[\theta_{BO}^*, \theta_{BP}^*]$, portanto é maior a probabilidade de θ_A se encontrar no intervalo $[\theta_{BO}^*, \theta_{BP}^*]$ do que θ_B . Isso leva a crer, por outro lado, que a condição poderia se inverter caso os θ fossem muito pequenos, digamos $\theta < 0,4$. Casos assim são, no entanto, raros. Portanto, uma empresa com boa saúde financeira (denotada por um *theta* alto) deveria tentar adiantar seu processo de rolagem de dívida, quando possível, para então reduzir um possível efeito adverso de um contágio advindo de uma empresa que apresente *theta* baixo.

6.2 Análise quanto ao modelo de contágio

O primeiro parâmetro estudado foi o valor do colateral, K . Corroborando com a análise de Oh, verificou-se uma diminuição tanto da probabilidade de contágio quanto de sua severidade ao se diminuir os valores de K . Assim, para um K 20% menor que o da simulação-base, obtiveram-se probabilidades de contágio cerca de 60% menores e severidades de contágio 20% menores, como era de se esperar, já que a derivada parcial em relação a K é constante. Verifica-se assim uma sensibilidade na probabilidade de contágio próxima a 3 (3 pontos percentuais de mudança na probabilidade de contágio para cada 1 ponto percentual em K). As empresas envolvidas, portanto, podem reduzir significativamente essa probabilidade ao reduzirem o valor do colateral em caso de *default* em seus contratos de débito.

O segundo parâmetro avaliado foi a taxa de retorno utilizada pelos credores pessimistas no mercado. Aqui, mais uma vez se corroborou a visão de Oh e verificou-se uma redução de 38% na severidade de contágio e da ordem de 75% na probabilidade de contágio através de uma diminuição de cerca de 20% na diferença entre as taxas de desconto utilizadas. Esta última representa uma sensibilidade próxima de incríveis 3,5 pontos percentuais. Políticas públicas que aumentem a confiança dos credores mais pessimistas no mercado possuem, portanto, um potencial relevante para a mitigação deste fenômeno.

Para o parâmetro ε , o ruído na informação, uma variação de 20% em seu valor para menos resultou em 10,9% na redução da probabilidade de contágio e em um aumento de 11,1% na severidade de contágio, sensibilidades de aproximadamente 0,55 pontos percentuais. Inversamente, um aumento de 20% em ε resultou em um acréscimo na probabilidade de contágio de 11,9% e um decréscimo na severidade de contágio de 9,1%, sensibilidades de 0,45 e 0,59 pontos percentuais, respectivamente. Esse resultado contra intuitivo pode ser explicado pelo seguinte raciocínio: uma redução em ε equivale a uma redução da incerteza do mercado em relação às empresas, o que resulta na redução dos valores de equilíbrio para θ . Um θ de equilíbrio menor, por sua vez, aumenta as probabilidades de sucesso das empresas, reduzindo, por consequência, a probabilidade de ocorrência de contágio. No caso em que a empresa A falha, no entanto, a probabilidade *ex post* de contágio para a empresa B de fato aumenta, o que é representado por uma maior severidade de contágio. Apesar de apresentar uma relevância relativa menor perante os outros parâmetros, ε pode ser alterado pelas empresas através da redução das incertezas no mercado, por exemplo, com a divulgação de dados empresariais mais precisos no mesmo, assim reduzindo a probabilidade geral de ocorrência de contágio.

Por fim, a influência do tamanho, ou proporção de credores do grupo 1, λ , é, como no caso de K , diretamente proporcional à severidade de contágio. Isto ocorre porque, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, a severidade de contágio passa a valer:

$$SC (\varepsilon \rightarrow 0) = \frac{\gamma(\delta_O - \delta_P)(1-q)K}{\delta_O \delta_P} \quad (25)$$

Portanto, uma redução de 20% em λ se traduz em igual redução de 20% na severidade de contágio. Assim, a diminuição das incertezas acerca das posturas dos credores contribui para a diminuição do problema.

7 CONCLUSÕES

A ocorrência de crises de liquidez em empresas é de caráter crítico, levando por vezes à falência da instituição. Um dos possíveis desdobramentos de tais crises, pontuais, é, no entanto, a possibilidade de ocorrência do chamado contágio financeiro, fenômeno que pode afetar diversas outras empresas. Esta foi, *a priori*, a motivação do trabalho, por ser o tema relevante, portanto, para uma gama muito ampla de instituições. Além dos típicos interessados em casos de contágio, as instituições financeiras, ainda são diretamente afetadas quaisquer outras empresas dos mais diversos setores.

Como visto no início deste trabalho, portanto, o efeito não se restringe a empresas financeiras, tampouco a empresas atuantes em um mesmo setor. Para que seja deflagrado, é necessário apenas que tais empresas encontrem-se vinculadas através de credores em comum, que observam o resultado de uma empresa em relação a seus credores e utilizam o conhecimento adquirido para ajustar sua variável de decisão para rolagem da dívida de outras empresas.

O propósito deste capítulo será, primeiramente, resumir as principais conclusões às quais se chega ao fim deste trabalho. Também serão descritas as dificuldades encontradas ao longo do desenvolvimento deste trabalho e como o autor lidou com elas conforme seu surgimento. Além disso, sugestões para estudos posteriores serão realizadas e, finalmente o autor tecerá comentários finais sobre o desenvolvimento geral do trabalho.

7.1 Síntese dos resultados obtidos

Ao longo deste trabalho foi adaptado um modelo de contágio desenvolvido por Oh (2013), que não levava em consideração dados reais das empresas estudadas. Através da equação de BSM, foi desenvolvido um modelo que captasse tais informações e as transformasse em um indicador a ser introduzido como *input* no referido modelo.

Os resultados obtidos têm o potencial de identificar quais são os parâmetros que mais influenciam a probabilidade e a severidade de contágio, o que pode trazer vantagens

significativas às empresas que possuam o conhecimento de tal mecânica e tomem providências a respeito.

Os resultados das análises de sensibilidade com relação ao modelo BSM podem ser encontrados de forma resumida na Tabela 9.

Tabela 9 – Resultados da análise de sensibilidade (BSM, resumo)

Parâmetro	Valor relacionado à probabilidade máxima de contágio	Probabilidade máxima de contágio
σ_E empresa A	104,15%	4,49%
σ_E empresa B	111,51%	4,34%
σ_E empresa B Ordem de rolagem invertida (B antes de A)	121,51%	4,10%

Fonte: Elaborado pelo autor

Observou-se um ponto de máximo para a probabilidade de contágio em todas as análises realizadas. Valores elevados de volatilidade de *equity* estiveram relacionados com maiores volatilidades dos ativos e maiores probabilidades de *default*. Valores intermediários de volatilidade, entretanto, são mais perigosos quando avaliamos a probabilidade de contágio. Empresas devem, portanto, tentar reduzir a volatilidade de suas ações abaixo desta faixa intermediária, de modo a reduzir sua probabilidade de *default*, ao mesmo tempo em que reduzem a probabilidade de contágio do sistema como um todo.

Em relação à ordem de rolagem da dívida, os resultados apontam que a antecipação do processo de rolagem beneficia empresas com bons indicadores. Uma dedução secundária é ainda o benefício conseguido, em termos globais, através da consideração das rolagens de dívida de empresas, por parte dos credores, do menor para o maior valor de θ . Ao se definir essa ordem, a probabilidade de contágio do processo como um todo pode, portanto, ser reduzida.

Os resultados das análises de sensibilidade com relação ao modelo de contágio podem ser encontrados de forma resumida na Tabela 10.

Tabela 10 – Resultados da análise de sensibilidade (contágio, resumo)

Parâmetro	Variação no parâmetro	Variação na probabilidade de de contágio	Sensibilidade na probabilidade de contágio	Variação na severidade e de contágio	Sensibilidade na severidade de contágio
K	-20%	-59,56%	+2,978	-20%	+1,000
$\delta_O - \delta_P$	-21,43%	-75,09%	+3,504	-38,27%	+1,786
ε	-20%	-10,87%	+0,544	+11,11%	-0,556
ε	+20%	+11,88%	+0,594	-9,09%	-0,454
λ	-20%	-	-	-20%	+1,000

Fonte: Elaborado pelo autor

O parâmetro $\delta_O - \delta_P$ foi identificado como o mais relevante, pois sua alteração é muito sensível ao modelo. Práticas que fomentem a diminuição da disparidade de expectativas entre os credores (refletidas em sua taxa de desconto utilizada) têm, portanto, grande potencial para a redução do fenômeno de contágio.

Nota-se também a relação inversa entre o parâmetro ε e a severidade de contágio. Do ponto de vista de uma empresa afetada pelo contágio de segunda empresa que eventualmente tenha passado por uma crise de liquidez imediatamente anterior à primeira, sua situação é piorada com o aumento da confiabilidade dos dados do mercado (menor ε), como denotado pela maior severidade de contágio observada. Do ponto de vista do mercado como um todo, no entanto, este aumento é benéfico, pois diminui a probabilidade de contágio de forma geral.

7.2 Dificuldades encontradas

A principal dificuldade encontrada ao longo deste trabalho foi a solução do sistema de equações não lineares discutida na Seção 4.2.2. Como o processo dependia da redução do erro quadrático a partir de iterações com passos aleatórios normalmente distribuídos, foi preciso uma série de testes a fim de se determinar os parâmetros desta distribuição normal de modo que, por um lado, o passo escolhido não fosse tão pequeno a ponto de a solução estacionar em

um mínimo local e, por outro, não fosse tão grande a ponto de que não se encontrassem valores que diminuíssem o erro quadrático. Após este estudo inicial, ainda foi preciso horas de simulação para cada análise de sensibilidade, já que cada parâmetro foi modificado cerca de 15 vezes e o modelo de contágio simulado 50.000 vezes para garantir a consistência dos resultados. A cada vez que o parâmetro era alterado, o modelo BSM era novamente rodado, necessitando de algo entre 6.000 e 200.000 iterações para convergência, dependendo do caso. Em suma, portanto, foram realizadas entre 630.000 e 21.000.000 de iterações no modelo BSM e 5.250.000 simulações do modelo de contágio.

Outra dificuldade foi a não familiaridade do autor com o mercado financeiro e com o modelo BSM, o que demandou certo esforço inicial para o domínio dos conceitos. Buscou-se, por outro lado, minimizar a priorização dos conceitos excessivamente técnicos do mundo das finanças, procurando-se focar nas temáticas mais relevantes à Engenharia de Produção, como, por exemplo, preferir-se a ótica das empresas em detrimento à dos credores para fim de análise dos resultados.

7.3 Sugestões para próximos estudos

Apesar de complementar a abordagem proposta por Oh e explorar esta área pouco investigado que é a ocorrência de contágio entre empresas não financeiras, o presente trabalho não esgota as possibilidades de desenvolvimento na área.

Uma possibilidade de expansão seria se retirar a simplificação utilizada para se calcular o valor do passivo de curto prazo e se realizar uma análise de sensibilidade variando a composição do passivo (em sentido amplo) empresarial em termos de *equity*, passivo circulante e não circulante.

Há ainda a possibilidade, ainda mais interessante, de se analisar uma carteira de empresas que possuam credores em comum, verificando então cadeias de rolagem de dívidas maiores, com mais de duas empresas. É possível também desfazer ainda outra hipótese simplificadora, a de que a postura dos credores permanece inalterada após a rolagem de dívida da primeira empresa. Por exemplo, em um processo sequencial a riqueza dos credores seria alterada a cada rolagem, ao mesmo tempo modificando suas posturas (valores de δ) e possibilitando a inferência de suas posturas por parte dos outros credores através desta

mudança de riqueza. Assim, poder-se-ia investigar os efeitos da mudança de λ entre um processo de rolagem e outro.

7.4 Considerações finais

Finalmente, é preciso reconhecer aqui a importância do conhecimento adquirido ao longo do curso de Graduação em Engenharia de Produção para a realização deste trabalho. Disciplinas como Cálculo Diferencial e Integral, Introdução à Computação, Cálculo Numérico, Estatística, Engenharia Econômica e Finanças, Simulação, além daquelas cursadas no Duplo Diploma, como Macro e Microeconomia, foram de fundamental importância por proverem o ferramental necessário.

O autor gostaria de ressaltar ainda a relevância da abordagem multidisciplinar de sua Graduação, que o equipou para tratar e modelar contextos de forma sistêmica e abrangente, utilizando conhecimentos de áreas distintas da Engenharia e aplicando-os de forma integrada para a solução do problema proposto.

8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AHARONY, J. & I. SWARY. Contagion effects of bank failures: Evidence from capital markets. **Journal of Business**, p. 305-322, 1983. ISSN 0021-9398.
- BB. Banco do Brasil, 2014. Disponível em: <<http://bancodobrasil.com.br/portalbb/page3,136,2545,0,0,1,8.bb>>. Acesso em: 16.04.2014.
- BELLHOUSE, D. The problem of Waldegrave. **Electronic Journal for the History of Probability and Statistics**, v. 3, n. 2, p. 1-12, 2007.
- BERG, A. & C. PATTILLO. Predicting currency crises:: The indicators approach and an alternative. **Journal of International Money and Finance**, v. 18, n. 4, p. 561-586, 1999. ISSN 0261-5606.
- BIS. Liquidity Risk: Management and Supervisory Challenges. **Basel Committee on Banking Supervision**, 2008.
- BLACK, F. & M. SCHOLES. The pricing of options and corporate liabilities. **The journal of political economy**, p. 637-654, 1973. ISSN 0022-3808.
- BM&FBOVESPA. Volatilidade dos Ativos. 2014. Disponível em: <<http://www.bmfbovespa.com.br/cias-listadas/volatilidade-ativos/ResumoVolatilidadeAtivos.aspx?metodo=padrao&periodo=1Ano&codigo=bovespa&idioma=pt-br>>. Acesso em: 13.05.2014.
- BORENSZTEIN, E., et al. **Anticipating balance of payments crises the role of early warning systems**. International Monetary Fund, 1999. ISBN 1451952074.
- BOYER, B. H., et al. **Pitfalls in tests for changes in correlations**. Board of Governors of the Federal Reserve System, 1997.
- BUSINESSDICTIONARY. 2014. Disponível em: <<http://www.businessdictionary.com/>>. Acesso em: 16.04.2014.
- BVD (2014). "Orbis." Acessado em 12.05.2014 em <http://orbis.bvdinfo.com/version-201457/home.serv?product=OrbisNeo&restart=1>.
- CARLSSON, H. & E. VAN DAMME. Global games and equilibrium selection. **Econometrica**, v. 61, n. 5, p. 989-1018, 1993. ISSN 0012-9682.

CIFUENTES, R., et al. Liquidity risk and contagion. **Journal of the European Economic Association**, v. 3, n. 2-3, p. 556-566, 2005. ISSN 1542-4774.

COURNOT, A. A. & I. FISHER. **Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth**. Macmillan, 1897.

CROSBIE, P. & J. BOHN. **Modeling Default Risk**. Moody's KMV Company, p.1-31. 2003

DREHMANN, M. & K. NIKOLAOU. Funding liquidity risk: definition and measurement. **Journal of Banking & Finance**, v. 37, n. 7, p. 2173-2182, 2013. ISSN 0378-4266.

ECB. **The monetary policy of the ECB**. E. C. Bank. Frankfurt 2011.

EICHENGREEN, B., et al. **Contagious currency crises**. National bureau of economic research. 1996

EMIS-ISI (2014). "Emerging Markets Information Service (Brazil)." Acessado em 13.05.2014 em <http://www.securities.com/emis.html>.

FMA. **Financial Markets Authority**, New Zealand, 2014. Disponível em: <<https://www.fma.govt.nz/help-me-invest/risks-involved-in-investing/types-of-risk/>>. Acesso em: 16.04.2014.

FORBES, K. J. & R. RIGOBON. No contagion, only interdependence: measuring stock market comovements. **The Journal of Finance**, v. 57, n. 5, p. 2223-2261, 2002. ISSN 1540-6261.

FRANKEL, D. M., et al. Equilibrium selection in global games with strategic complementarities. **Journal of Economic Theory**, v. 108, n. 1, p. 1-44 %@ 0022-0531, 2003.

FRATZSCHER, M. **What causes currency crises: sunspots, contagion or fundamentals?** 1999

HAMAO, Y., et al. Correlations in price changes and volatility across international stock markets. **Review of Financial studies**, v. 3, n. 2, p. 281-307, 1990. ISSN 0893-9454.

HAMILTON, J. D. **Time series analysis**. Princeton university press Princeton, 1994.

HARSANYI, J. C. Games with randomly disturbed payoffs: A new rationale for mixed-strategy equilibrium points. **International Journal of Game Theory**, v. 2, n. 1, p. 1-23, 1973. ISSN 0020-7276.

INVESTOPEDIA. **Definições**, 2014. Disponível em: <<http://www.investopedia.com/dictionary/>>. Acesso em: 16.04.2014.

JEANNE, O. Are currency crises self-fulfilling?: A test. **Journal of International Economics**, v. 43, n. 3, p. 263-286, 1997. ISSN 0022-1996.

JEANNE, O. & P. MASSON. Currency crises, sunspots and Markov-switching regimes. **Journal of International Economics**, v. 50, n. 2, p. 327-350, 2000. ISSN 0022-1996.

KAUFMAN, G. G. Bank contagion: A review of the theory and evidence. **Journal of Financial Services Research**, v. 8, n. 2, p. 123-150, 1994. ISSN 0920-8550.

KEYNES, J. M. **A Treatise on money. Two volumes**. Londres: Macmillan, 1930.

KING, M. A. & S. WADHWANI. Transmission of volatility between stock markets. **Review of Financial studies**, v. 3, n. 1, p. 5-33, 1990. ISSN 0893-9454.

LEITNER, Y. Financial networks: Contagion, commitment, and private sector bailouts. **The Journal of Finance**, v. 60, n. 6, p. 2925-2953, 2005. ISSN 1540-6261.

MERTON, R. C. On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates*. **The Journal of Finance**, v. 29, n. 2, p. 449-470, 1974. ISSN 1540-6261.

MERTON, R. C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. **Journal of Financial Economics**, v. 3, n. 1, p. 125-144, 1976. ISSN 0304-405X.

MYERSON, R. B. Game theory: analysis of conflict. **Harvard University**, 1991.

NEUMANN, J. V. Zur theorie der gesellschaftsspiele. **Mathematische Annalen**, v. 100, n. 1, p. 295-320, 1928. ISSN 0025-5831.

NIKOLAOU, K. Liquidity (risk) concepts: definitions and interactions. **European Central Bank**, v. 1008, p. 1-72, 2009. ISSN ISSN 1725-2806 (online).

OH, F. D. Contagion of a liquidity crisis between two firms. **Journal of Financial Economics**, v. 107, n. 2, p. 386-400, 2013. ISSN 0304-405X.

PERICOLI, M. & M. SBRACIA. A primer on financial contagion. **Journal of Economic Surveys**, v. 17, n. 4, p. 571-608, 2003. ISSN 1467-6419.

SELTEN, R. Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games. **International Journal of Game Theory**, v. 4, n. 1, p. 25-55, 1975. ISSN 0020-7276.

VAN RIJCKEGHEM, C. & B. WEDER. Sources of contagion: is it finance or trade? **Journal of International Economics**, v. 54, n. 2, p. 293-308, 2001. ISSN 0022-1996.

APÊNDICE A – Códigos dos modelos construídos

A seguir encontram-se os códigos em Matlab dos modelos construídos para o desenvolvimento deste trabalho.

Modelo de contágio

```

function contagio

sens = zeros(15,22);

for var = 1:15

    % Parâmetros do modelo BSM
    r = 0.109;
    T = 1;
    Ve1 = 93705000;
    VOLe1 = 1.2415;
    Pc1 = 592992000;
    Pnc1 = 185283000;
    Ve2 = 2169704000;
    VOLe2 = 1.01;
    Pc2 = 1001311000;
    Pnc2 = 3074348000;

    % Calcula valores BSM
    [Va1,VOLa1,X1] = kmv (r,T,Ve1,VOLe1,Pc1,Pnc1);
    [Va2,VOLa2,X2] = kmv (r,T,Ve2,VOLe2,Pc2,Pnc2);

    %% Parâmetros do modelo de contágio
    iter = 50000;
    numcontagion = 0;
    probcontagion = 0;
    theta_barra_av = zeros(1,2);
    theta_av = zeros(2);
    theta_rnd_av = zeros(1,2);

    for iteration = 1:iter

        %% Inicializa parâmetros
        del_p = 0.11;
        del_o = 0.25;
        q = 0.4;
        e = 0.1;
        L = 1;
        V = 1.1*L;

```

```

lambda = 0.8;
K = 0.1;
s = zeros(3,1);
theta = zeros(2);
x_rnd = zeros(2);
contagion = 0;

%% Natureza escolhe tipo de credores
isopt = binornd(1,1-q);

%% Theta é calculado
theta_rnd(1,1)=thetarnd (Va1,VOLa1,X1,r,T);
theta_rnd_av(1,1) = theta_rnd_av(1,1) + theta_rnd(1,1);
theta_rnd(1,2)=thetarnd (Va2,VOLa2,X2,r,T);
theta_rnd_av(1,2) = theta_rnd_av(1,2) + theta_rnd(1,2);

%% Equilíbrio firma A

% Calcula firma A
s(1,1) = (lambda*(1-lambda)*(1-q)*(del_o-del_p))/(del_o*(1+2*e-lambda));
s(2,1) = (2*lambda*e*(del_o-del_p))/(del_o*(1+2*e-lambda));
s(3,1) = (2*K-del_p)*e/K;
theta(1,1) = K*(1-s(1,1))/del_p;
theta(2,1) = K*(1-s(1,1)-s(2,1))/del_p;
x(1,1) = K*(1-s(1,1)+s(3,1))/del_p;
x(2,1) = K*(1-s(1,1)-s(2,1)+(del_p/del_o)*s(3,1))/del_p;
x(3,1) = K*(1-s(1,1)-(1-q)*s(2,1)+s(3,1))/del_p;

% Equilíbrio firma A
if isopt == 1
    theta_barra(1,1) = theta(2,1);
    x_barra(1,1) = x(2,1);
else
    theta_barra(1,1) = theta(1,1);
    x_barra(1,1) = x(1,1);
end

theta_barra_av(1,1) = theta_barra_av(1,1)+theta_barra(1,1);
x_barra(2,1) = x(3,1);

%% x(A,j) é observado
i=1;
for j = 1:2
    x_rnd(j,1) = theta_rnd(1,i)-e+(2*e)*rand(1);
end

%% Decide rolagem firma A
n = 0;
for i = 1:2

```

```

if x_rnd (i,1)>= x_barra(i,1)
    n = n+1;
end
end
l(1,1) = n/size(x_rnd,2);

%% Decide sucesso firma A
isfail(1,1) = 0;
if theta_rnd(1,1) < theta_barra(1,1)
    isfail(1,1) = 1;
end
fprintf('\nTheta_A: %.3f \n', theta_rnd(1,1));
fprintf('Theta_A_barra: %.3f \n', theta_barra(1,1));
fprintf('Intervalo: %.3f-%.3f \n', theta(2,1), theta(1,1));
theta_av(2,1) = theta_av(2,1)+theta(2,1);
theta_av(1,1) = theta_av(1,1)+theta(1,1);
fprintf('Falha em A: %.0f \n', isfail(1,1));
fprintf('l_1: %.1f \n', l(1,1));

%% Calcula equilíbrio firma B

% Calcula firma B
theta(1,2) = K/del_p;
theta(2,2) = lambda*K/del_o+((1-lambda)*K)/del_p;
x(1,2) = (K*(2*e+1)/del_p)-e;
x(2,2) = (K*(lambda+2*e)/del_o)+((1-lambda)*K/del_p)-e;
x(3,2) = (lambda*K/del_o)+(K*(1-lambda+2*e)/del_p)-e;

% Equilíbrio firma B
if theta_rnd(1,1) < theta(2,1) || theta_rnd(1,1) > theta(1,1)
    if isopt == 1
        theta_barra(1,2) = theta(2,1);
        x_barra(1,2) = x(2,1);
    else
        theta_barra(1,2) = theta(1,1);
        x_barra(1,2) = x(1,1);
    end
    x_barra(2,2) = x(3,1);
elseif isfail(1,1) == 1
    theta_barra(1,2) = theta(1,2);
    x_barra(1,2) = x(1,2);
    contagion = 1;
else
    theta_barra(1,2) = theta(2,2);
    x_barra(1,2) = x(2,2);
    x_barra(2,2) = x(3,2);
end

%% x(B,j) é observado

```

```

i=2;
for j = 1:2
    x_rnd(j,i) = theta_rnd(1,i)-e+(2*e)*rand(1);
end

%% Decide rolagem firma B
n = 0;
for i = 1:2
    if x_rnd (i,2)>= x_barra(i,2)
        n = n+1;
    end
end
l(1,2) = n/size(x_rnd,2);

%% Decide sucesso firma B
isfail(1,2) = 0;
if theta_rnd(1,2) < theta_barra(1,2)
    isfail(1,2) = 1;
end

%% Detecta se contágio ocorreu
if theta_rnd(1,2) >= theta(2,2) && theta_rnd(1,2) <= theta(1,2) &&
theta_rnd(1,1) <=theta(1,1) && theta_rnd(1,1) >= theta(2,1) && isfail(1,1)==1 &&
isfail(1,2)==1
    contagion = 1;
    numcontagion = numcontagion + 1;
else
    contagion = 0;
end
fprintf('\nTheta_B: %.3f \n', theta_rnd(1,2));
fprintf('Theta_B_barra: %.3f \n', theta_barra(1,2));
theta_barra_av(1,2) = theta_barra_av(1,2) + theta_barra(1,2);
fprintf('Intervalo: %.3f-%.3f \n', theta(2,2), theta(1,2));
theta_av(1,2) = theta_av(1,2)+theta(1,2);
theta_av(2,2) = theta_av(2,2)+theta(2,2);
fprintf('Falha em B: %.0f \n', isfail(1,2));
fprintf('l_2: %.1f \n', l(1,2));
fprintf('Contagion: %.0f \n', contagion);

end

%% Calcula médias
theta_barra_av(1,1) = theta_barra_av(1,1)/iter;
theta_barra_av(1,2) = theta_barra_av(1,2)/iter;
theta_av(1,2) = theta_av(1,2)/iter;
theta_av(2,1) = theta_av(2,1)/iter;
theta_av(1,1) = theta_av(1,1)/iter;
theta_av(2,2) = theta_av(2,2)/iter;
theta_rnd_av(1,1) = theta_rnd_av (1,1)/iter;

```

```

theta_rnd_av(1,2) = theta_rnd_av (1,2)/iter;
probcontagion = numcontagion/iter;

%% Compila resultados
sens (var,1) = Ve1;
sens (var,2) = Ve2;
sens (var,3) = VOLE1;
sens (var,4) = VOLE2;
sens (var,5) = probcontagion;
sens (var,6) = Va1;
sens (var,7) = VOLa1;
sens (var,8) = Va2;
sens (var,9) = VOLa2;
sens (var,10) = theta_barra_av(1,1);
sens (var,11) = theta_barra_av(1,2);
sens (var,13) = theta_av(2,1);
sens (var,12) = theta_av(1,1);
sens (var,14) = theta_av(2,2);
sens (var,15) = theta_av(1,2);
sens (var,16) = theta_rnd_av(1,1);
sens (var,17) = theta_rnd_av(1,2);
sens (var,18) = r;
sens (var,19)=K;
sens (var,20)=del_o-del_p;
sens (var,21)=e;
sens (var,22)=lambda;

end

for i=1:15
    fprintf('SensVOLe;');
    for j=1:22
        fprintf('%.10f;', sens(i,j));
    end
    fprintf('\n');
end

```

Modelo BSM

```

function [Va,VOLa,X] = kmv (r,T,Ve,VOLe,Pc,Pnc)

% Ve: Equity
% Va: Ativo
% Pc: Passivo circulante
% Pnc: Passivo não-circulante
% X: Passivo

```

```

% VOLE: Volatilidade da Equity
% VOLa: Volatilidade do ativo
% r: Taxa livre de risco
% T: Horizonte de tempo
% delta: Erro quadrático

%% valores iniciais
Va = 4000000000;
VOLA = 0.4;

X = Pc + Pnc/2;
d1 = (log(Va/X)+(r+(VOLA^2)/2)*T)/VOLA*sqrt(T);
d2 = d1-VOLA*sqrt(T);
Vex = Va*normcdf(d1,0,1)-X/exp(r*T)*normcdf(d2,0,1);
VOLex = Va/Vex*VOLA*normcdf(d1,0,1);
delta1 = (Vex - Ve)/Ve;
delta2 = (VOLex - VOLE)/VOLE;
delta = (delta1^2+delta2^2)*1000000;
passo=0.1;
i=0;
flag = 0;
stop = 0;

%% Convergência
while round(delta) ~= 0

    flag = 0;
    while flag == 0

        if ~mod(i,3000) == 1
            Va=Va*1.001;
            VOLa = VOLa*1.0001;
            delta = calcula (r,T,Ve,VOLe,Pc,Pnc,Va,VOLA);
        end

        if i>30000 && delta < 1
            delta = 0;
            flag = 1;
        end

        if i>100000 && delta < 5
            delta = 0;
            flag = 1;
        end

        if delta < 1
            passo = random('norm',0.0001,0.15);
            elseif delta < 5
                passo = random('norm',0.0006,0.15);
        end
    end
end

```

```

else
    passo = random('norm',0.005,0.15);
end
% V
Vax = Va*(1+passo);
deltax = calcula (r,T,Ve,VOLe,Pc,Pnc,Vax,VOLA);
fprintf('\n0\n');
if floor(deltax) < floor(deltax)
    Va = Va*(1+passo);
    delta = calcula (r,T,Ve,VOLe,Pc,Pnc,Va,VOLA);
    flag = 1;
    fprintf('\n1\n');
elseif floor(deltax) > floor(delta)
    Vax = Va*(1-passo);
    deltax = calcula (r,T,Ve,VOLe,Pc,Pnc,Vax,VOLA);
    fprintf('\n2\n');
    if floor(deltax) < floor(delta)
        Va = Va*(1-passo);
        delta = calcula (r,T,Ve,VOLe,Pc,Pnc,Va,VOLA);
        flag = 1;
        fprintf('\n3\n');
    else %VOL
        VOLax=VOLA*(1+passo);
        deltax = calcula (r,T,Ve,VOLe,Pc,Pnc,Va,VOLax);
        fprintf('\n4\n');
        if floor(deltax) < floor(delta)
            VOLa = VOLa*(1+passo);
            delta = calcula (r,T,Ve,VOLe,Pc,Pnc,Va,VOLA);
            flag = 1;
            fprintf('\n5\n');
        elseif floor(deltax) > floor(delta)
            VOLax = VOLa*(1-passo);
            deltax = calcula (r,T,Ve,VOLe,Pc,Pnc,Va,VOLax)
            fprintf('\n6\n');
            if floor(deltax) < floor(delta)
                VOLa = VOLa*(1-passo);
                delta = calcula (r,T,Ve,VOLe,Pc,Pnc,Va,VOLA);
                flag = 1;
                fprintf('\n7\n');
            end
        end
    end
end
end

i=i+1;
fprintf('\ni: %.3f \n', i);
fprintf('\ndelta: %.3f \n', delta);
fprintf('\ndeltax: %.3f \n', deltax);
fprintf('\nVa: %.3f \n', Va);

```

```

fprintf('\nVOLA: %.3f \n', VOLa);
fprintf('\nd1: %.3f \n', d1);

end
end

d1 = (log(Va/X)+(r+(VOLA^2)/2)*T)/VOLA*sqrt(T);
d2 = d1-VOLA*sqrt(T);
fprintf('\nVa: %.3f \n', Va);
fprintf('\nVOLA: %.6f \n', VOLa);
fprintf('\ndelta: %.6f \n', delta);

end

```

Modelo para V_A^T

```

function [thetakmv] = thetarnd(Va,VOLA,X,r,T)

epsilon = normrnd (0,1);
Vat = Va*exp(epsilon*VOLA*T);
d1 = (log(Vat/X)+(r+(VOLA^2)/2)*T)/VOLA*sqrt(T);
d2 = d1-VOLA*sqrt(T);
thetakmv = 1-normcdf(-d2);
fprintf('\ntheta: %.6f \n', thetakmv);

end

```